Formule de Minàc et William

Désignons par p_n le $n^{\text{ième}}$ nombre premier ($p_1 = 2$) et par $[x]$ la partie entière d'un nombre réel *x*. Alors :

$$p_n = 2 + \sum_{m=2}^{2^n} \left[\left[\frac{n}{1 + \sum_{k=2}^{m} \left[\frac{(k-1)!+1}{k} - \left[\frac{(k-1)!}{k} \right] \right]} \right]^{\frac{1}{n}} \right].$$

Étant donné un entier $m \geq 2$, on notera $\pi(m)$ le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à *m*. Il est donc évident que $\pi(m) \leq n-1$ si et seulement si $m < p_n$.

Par ailleurs, si l'on admet le postulat de Bertrand, il est facile de voir que $p_n < 2^n$.

Lemme 1 : Pour $k \geq 2$, $\left[\frac{(k-1)!+1}{k} - \left[\frac{(k-1)!}{k} \right] \right] = 0$ si l'entier *k* est composé, 1 s'il est premier.

On dispose donc d'une formule explicite donnant la fonction indicatrice des nombres premiers, ce qui est pour le moins inattendu !

Si *k* est composé, $\frac{(k-1)!}{k}$ est entier (*), donc $\frac{(k-1)!+1}{k} - \left[\frac{(k-1)!}{k} \right] = \frac{(k-1)!+1}{k} - \frac{(k-1)!}{k} = \frac{1}{k}$ dont la partie entière est nulle.

Maintenant, si *k* est premier, $\frac{(k-1)!+1}{k}$ est un entier d'après le théorème de Wilson, donc $\frac{(k-1)!+1}{k} - \left[\frac{(k-1)!}{k} \right]$ est un entier non nul. De plus, cet entier non nul vérifie :

$$\frac{(k-1)!+1}{k} - \left[\frac{(k-1)!}{k} \right] = \frac{1}{k} + \frac{(k-1)!}{k} - \left[\frac{(k-1)!}{k} \right] \leq \frac{1}{k} + 1 < 2,$$

ce qui assure que sa partie entière vaut 1.

De ce lemme résulte immédiatement que pour $m \geq 2$, on a :

$$\pi(m) = \sum_{k=2}^{m} \left[\frac{(k-1)!+1}{k} - \left[\frac{(k-1)!}{k} \right] \right].$$

Lemme 2 : $\left[\left[\frac{n}{1+k} \right]^{\frac{1}{n}} \right] = 0$ si $k > n-1$, 1 si $k \leq n-1$.

Si $k > n-1$, $\frac{n}{1+k} < 1$ et le résultat est évident.

Si $k \leq n-1$, on a $1 \leq \frac{n}{1+k} \leq n < 2^n$ et le résultat en résulte en élevant à la puissance $1/n$ et en prenant les parties entières.

Reste à combiner les lemmes **1.** et **2.** pour voir que :

$$\left[\left[\frac{n}{1+\sum_{k=2}^{m}\left[\frac{(k-1)!+1}{k}-\left[\frac{(k-1)!}{k}\right]\right]}\right]^{\frac{1}{n}}\right]=1 \text{ si } \pi(m)\leq n-1, \text{ 0 sinon.}$$

Pour un entier N quelconque, $\displaystyle\sum_{m=2}^{N}\left[\left[\frac{n}{1+\sum_{k=2}^{m}\left[\frac{(k-1)!+1}{k}-\left[\frac{(k-1)!}{k}\right]\right]}\right]^{\frac{1}{n}}\right]$ compte donc le nombre d'entiers m vérifiant $2\leq m\leq N$ et tels que $\pi(m)\leq n-1$, c'est-à-dire tels que $m<p_n$. Si l'on choisit $N\geq p_n$, par exemple $N=2^n$ comme on l'a dit au début, on compte alors le nombre d'entiers m vérifiant $2\leq m<p_n$, c'est-à-dire p_n-2.

Remarque : la borne supérieure 2^n de la sommation est purement artificielle, puisque l'essentiel est de sommer jusqu'à un entier N dont on ait la certitude qu'il est plus grand que p_n. En admettant le théorème des nombres premiers et l'équivalent $p_n \sim n\ln n$, cette borne peut donc considérablement être rabaissée, au moins pour n assez grand. Mais ça ne rend hélas pas cette merveilleuse formule plus utilisable pour autant !

(*) : si k n'est pas le carré d'un nombre premier, il est évident que $\frac{(k-1)!}{k}$ est entier. Si $k=p^2$, alors figurent dans $(k-1)!$ les facteurs p et $2p$ ce qui assure que $\frac{(k-1)!}{k}$ est entier, *sauf pour k égal à 4*. Mais pour cette valeur de k, on a :

$$\left[\frac{(k-1)!+1}{k}-\left[\frac{(k-1)!}{k}\right]\right]=\left[\frac{7}{4}-\left[\frac{6}{4}\right]\right]=\left[\frac{3}{4}\right]=0.$$