ALGÈBRE EUCLIDIENNE

1. **a.** Dans $\mathbb{R}^2$ euclidien orienté, que peut-on dire de la composée de deux symétries orthogonales ?

b. Compléter la matrice A suivante pour que ce soit une matrice orthogonale négative :

$$A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & 3 & . \\ -2 & 6 & . \\ 3 & . & . \end{pmatrix}$$

c. À quelle condition (C) sur les réels a, b et c la matrice A suivante est-elle une matrice d'isométrie ?

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}.$$

Déterminer géométriquement le lieu des points de l'espace de coordonnées (a,b,c) vérifiant la condition (C).

d. Prouver, en adaptant une démonstration du cours, que les valeurs propres complexes d'une matrice orthogonale sont de module 1.

---

2. Soit u une isométrie d'un espace euclidien E. On pose $v = Id_E - u$.

a. Prouver que $\ker v = (\operatorname{Im} v)^{\perp}$. Que peut-on en déduire ?

b. En déduire, pour x élément de E, la limite de la suite (m_n) définie par $m_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u^k(x)$.

c. Interprétation géométrique ?

---

3. **a.** Soit $M = (m_{i,j})$ la matrice d'un endomorphisme u d'un espace euclidien E dans une base orthonormée $e = (e_1, \dots, e_n)$. Exprimer le coefficient $m_{i,j}$ en fonction de produits scalaires faisant intervenir u et les e_i.

b. Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice orthogonale. Prouver que $\left|\displaystyle\sum_{i,j} a_{i,j}\right| \le n$ (introduire le vecteur S dont les coordonnées sont toutes égales à 1 dans une base orthonormée). Cette majoration est-elle la plus fine possible ?

---

4. **a.** Soit A une matrice symétrique réelle telle qu'il existe p dans $\mathbb{N}^*$ tel que $A^p = I_n$. Prouver que $A^2 = I_n$.

b. Soit $M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$. Prouver que $M^{\mathrm{T}}M$ et MM^{T} ont le même polynôme caractéristique et en déduire que ces deux matrices sont semblables.

5.* Soit E un espace euclidien de dimension n. Prouver par récurrence qu'il est impossible de trouver $n+2$ vecteurs x_i dans E vérifiant $\forall i \neq j,\ (x_i | x_j) < 0$. Interprétation géométrique ?

---

6. Prouver que l'application définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $\left(M \middle| N\right) = \operatorname{tr}(M^{\mathrm{T}}N)$ est un produit scalaire, pour lequel on déterminera une base orthonormée. On définit un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ en posant, A étant une matrice fixée, $\Phi(M) = AM$. Déterminer l'adjoint de Φ pour ce produit scalaire.

7.* Soient x, a et b trois vecteurs d'un espace euclidien E, x étant supposé non nul. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un endomorphisme f de E tel que $f(x) = a$ et $f^*(x) = b$.

8. On considère la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

A est-elle positive ? Définie positive ? (2 méthodes).

9. Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E.

a. Pourquoi peut-on parler de la plus grande valeur propre a de $u^* \circ u$? Pourquoi a-t-on $a \geq 0$? Pourquoi $u^* \circ u$ possède-t-il une base orthonormée de vecteurs propres ?

b. Soit x un élément de E. En décomposant x sur une telle base, prouver que $\|u(x)\| \leq \sqrt{a}\,\|x\|$ et que cette inégalité peut être une égalité pour certaines valeurs non nulles de x.

10. On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne naturelle, et on identifie les éléments de $\mathbb{R}^n$ aux matrices lignes de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$.

a. Soient A et B deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Comment interpréter, en termes de produit scalaire, le coefficient en position i, j de la matrice AB^{T} ?

b. Soit S une matrice symétrique définie positive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En utilisant le cours et la question précédente, prouver l'existence de n vecteurs $x_1, \ldots, x_n$ de $\mathbb{R}^n$ dont S est la matrice de Gram (c'est-à-dire que le terme en position i, j de S est $(x_i | x_j)$).

c. Soit γ un réel élément de $]0,1[$ et A la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & (\gamma) \\ & \ddots & \\ (\gamma) & & 1 \end{pmatrix}.$$

Prouver que A est définie positive.

En déduire l'existence de n vecteurs normés de $\mathbb{R}^n$ $x_1, \ldots, x_n$ tels que $(x_i | x_j) = \gamma$ pour $i \neq j$.

Interprétation géométrique ?

11. *Division vectorielle*

On se donne deux vecteurs a et b de $\mathbb{R}^3$ euclidien orienté, a étant non nul, et on envisage l'équation $a \wedge x = b$ d'inconnue x.

a. Donner une condition nécessaire portant sur a et b pour que cette équation possède des solutions.

b. On suppose satisfaite la condition trouvée à la question précédente.
Chercher une solution particulière de l'équation sous la forme $\lambda\, a \wedge b$.

c. Donner alors toutes les solutions de l'équation.