ALGÈBRE LINÉAIRE (1)

1. On se place dans $\mathbb{R}$ considéré comme un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel.

a. Prouver l'indépendance des vecteurs 1, $\sqrt{2}$ et $\sqrt[3]{2}$.

b. Prouver que le polynôme X^3+X+1 possède une unique racine réelle a, et que $a \notin \mathbb{Q}$. Prouver la liberté de la famille $(1,a,a^2)$ (on pourra effectuer une division euclidienne de polynômes).

---

2. *Florilège*

a. On se donne les quatre vecteurs de $\mathbb{R}^4$ suivants :

$$e_1=(1,0,-1,2) \quad ; \quad e_2=(0,1,1,1) \quad ; \quad e_3=(2,1,-1,0) \quad ; \quad e_4=(-1,1,2,a)$$

Calculer le rang de la famille qu'ils constituent, et dans le cas où ce rang ne vaut pas 4, donner une équation du sous-espace qu'ils engendrent.

b. On considère un espace vectoriel E de dimension finie n, et une base $(e_1,\dots,e_n)$ de E.

Prouver que les vecteurs $x_i=e_1-e_i$, pour $i=2,\dots,n$, constituent une famille libre, et qu'ils forment une base du sous-espace H défini par $H=\{x\in E,\ \ x=x_1e_1+\dots+x_ne_n \,/\, x_1+\dots+x_n=0\}$.

c. On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants : $a=(1,2,1)$; $b=(1,3,2)$; $c=(1,1,0)$; $d=(3,8,5)$.

Comparer l'espace vectoriel engendré par a et b avec celui engendré par c et d.

d. E désigne l'espace des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On désigne par F le sous-espace engendré par les fonctions $c_n : x \mapsto \cos nx$ ($n\in\mathbb{N}$) et par G le sous-espace engendré par les fonctions $p_n : x\mapsto \cos^n x$. Prouver que $F=G$. Les fonctions $x\mapsto \sin x$; $x\mapsto \cos\frac{3}{2}x$; $x\mapsto \cos^2\frac{3}{2}x$ sont-elles dans F ?

e. On donne dans $\mathbb{R}^3$ le sous-espace $H=\{(x,y,z)\,/\,x+y+z=0\}$ et $u=(1,-1,1)$. Prouver que $\mathbb{R}^3=H\oplus\mathbb{R}u$ et donner l'expression du projeté d'un vecteur $X=(x,y,z)$ sur H parallèlement à $\mathbb{R}u$

e. Dans $E=\mathbb{R}_3[X]$, on considère les trois sous-espaces F, G et H suivants :

$$F=\{P\in\mathbb{R}_3[X]\,/\,P(0)=P(1)=P(2)=0\},\ G=\{P\in\mathbb{R}_3[X]\,/\,P(1)=P(2)=P(3)=0\},$$
$$H=\{P\in\mathbb{R}_3[X]\,/\,P(X)=P(-X)\}.$$

Montrer que $F\oplus G=\{P\in\mathbb{R}_3[X]\,/\,P(1)=P(2)=0\}$ et que $E=F\oplus G\oplus H$.

3*. Soit $\mathbb{K}$ un corps fini.

a. Prouver l'existence d'un entier non nul n tel que $n1_{\mathbb{K}}=0_{\mathbb{K}}$.

b. On note p le plus petit entier vérifiant la propriété de la question précédente. Prouver que p est premier.

c. Prouver que $\mathbb{k}=\{k1_{\mathbb{K}},\ k\in[[0,p-1]]\}$ est un sous corps de $\mathbb{K}$.

d. En voyant $\mathbb{K}$ comme un $\mathbb{k}$-espace vectoriel, prouver l'existence d'un entier n tel que $\mathrm{card}(\mathbb{K})=p^n$.

---

4. Soit (P_n) une suite de polynômes non nuls de $\mathbb{K}[X]$ dont les degrés sont deux à deux distincts.

a. On suppose qu'il existe $p\in\mathbb{N}$ tel que $\deg P_n\neq p$ pour tout n. Prouver que la famille (P_n) n'est pas libre maximale.

b. On suppose que pour tout n de $\mathbb{N}$, $\deg(P_{n+1})>\deg(P_n)$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la famille (P_n) soit une base de $\mathbb{K}[X]$.

---

5. Soient p et q deux projecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, tels que $p\circ q=0$. Prouver que $r=p+q-q\circ p$ est un projecteur, et déterminer son noyau et son image.

6. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et f et g deux endomorphismes de E tels que $f \circ g = Id_E$.

a. Démontrer que $\ker(g \circ f) = \ker f$.

b. Démontrer que $\operatorname{Im}(g \circ f) = \operatorname{Im} g$.

c. Démontrer que $E = \ker f \oplus \operatorname{Im} g$.

7. Soient k, K et L trois corps vérifiant $k \subset K \subset L$. On suppose que L est un K-espace vectoriel de dimension finie, et que K est un k-espace vectoriel de dimension finie. Prouver que L est un k-espace vectoriel de dimension finie, et donner sa dimension (pour cela, on cherchera une base du k-espace vectoriel L). Existe-t-il un corps intermédiaire entre $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]$, entre $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}[\sqrt[4]{2}]$?

8. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et f un endomorphismes de E tel que $f^2 - f - 2Id_E = 0$.

a. Prouver que f est bijectif et exprimer f^{-1} en fonction de f.

b. Démontrer que $E = \ker(f + Id_E) \oplus \ker(f - 2Id_E)$:

c. On suppose que E est de dimension finie. Prouver alors que $\operatorname{Im}(f + Id_E) = \ker(f - 2Id_E)$.

9. Soit f un endomorphisme d'un espace de dimension finie E.

a. Prouver que $E = \operatorname{Im} f \oplus \ker f \Rightarrow \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$.

b. Prouver que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2 \Leftrightarrow \ker f = \ker f^2$.

c. Prouver que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2 \Rightarrow E = \operatorname{Im} f \oplus \ker f$.

10. Prouver la liberté des familles de fonctions suivantes :

a. Dans l'espace des fonctions de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$, la famille $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}^{+*}}$ avec $f_\alpha : x \mapsto \alpha^x$.

b. Dans l'espace des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, la famille $(f_a)_{a \in \mathbb{C} - \mathbb{R}}$ avec $f_a : x \mapsto \dfrac{1}{x-a}$.

c. Soit, pour $\alpha \in \mathbb{R}^+$, la fonction $c_\alpha : x \mapsto \cos \alpha x$. Prouver la liberté de la famille $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (on, pourra calculer $\displaystyle\int_0^{2\pi} c_p c_q$ pour p et q entiers distincts). Par un tout autre moyen, prouver la liberté de la famille $(c_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}}$.

11. Soit E un -espace vectoriel de dimension finie n, A et B deux sous-espaces de E distincts de E. Prouver que la réunion de A et de B n'est pas égale à E (on pourra utiliser le résultat de la question **7.a.**). En déduire, par récurrence sur $n - p$, que deux sous-espaces de dimension p possèdent un supplémentaire commun.

12. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, A et B deux sous-espaces de E. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe u élément de $\mathcal{L}(E)$ tel que $\ker u = A$ et $\operatorname{Im} u = B$.

13*. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et f et g deux endomorphismes de E. Prouver, en complétant une base de $\ker f$ en base de E, que :

$$\ker f \subset \ker g \Leftrightarrow \exists h \in \mathcal{L}(E),\ g = h \circ f.$$

Dans le même ordre d'idée, prouver que :

$$\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Im} f \Leftrightarrow \exists h \in \mathcal{L}(E),\ g = f \circ h.$$

14. Soient f et g deux endomorphismes d'un même espace de dimension finie E. Prouver que l'on a :

$$\operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g) - \dim E \leq \operatorname{rg}(g \circ f) \leq \inf(\operatorname{rg}(f), \operatorname{rg}(g)).$$

Pour l'inégalité de gauche, on pourra raisonner sur la restriction de g à $\operatorname{Im} f$.