CALCUL DIFFÉRENTIEL

1. On désigne par f une fonction numérique différentiable au point $(0,-1,1)$ de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $f(0,-1,1)=0$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,-1,1)=2$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,-1,1)=-1$ et $\dfrac{\partial f}{\partial z}(0,-1,1)=1$. Calculer $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(\tan t,-\cos t,\sqrt{1+t})}{f(\ln(1+t),-1+\sin t,1)}$.

2. **a.** Déterminer la différentielle en tout point de l'application de $\mathbb{C}^*$ dans $\mathbb{C}$ définie par $z\mapsto \dfrac{1}{z}$.

b. Déterminer la différentielle de l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ définie par $A\mapsto \det A$ (on calculera ses dérivées partielles).

3. Soit $P\in\mathbb{C}[X]$, et f l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par $(x,y)\mapsto P(x+\mathrm{i}y)$. Prouver que f est une fonction harmonique, c'est-à-dire que l'on a $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$.

4. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'une norme d'algèbre, c'est-à-dire d'une norme vérifiant $\forall A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \|AB\|\le\|A\|\times\|B\|$.

On considère l'application $f\,:\,A\mapsto A^{-1}$ de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ dans lui-même.

a. Prouver que f est de classe $\mathcal{C}^1$.

b. Calculer les dérivées partielles de f en la matrice I_n dans les directions de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

c. Retrouver alors la valeur de $\mathrm{d}f(I_n)$.

d. Utiliser le résultat précédent pour calculer $\mathrm{d}f(A)$, A étant un élément quelconque de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$.

5. **a.** Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Donner, avec des quantificateurs, la définition de la continuité de f au point $(0,0)$, puis celle de « f est différentiable en $(0,0)$ ».

On considère la fonction définie par $f(x,y)=xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ si $(x,y)\neq(0,0)$, $f(0,0)=0$.

b. Prouver que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

c. Prouver que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

6. **a.** Déterminer toutes les fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=x^2y-xz$.

b. Déterminer toutes les fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=xf(x,y)$.

7.* **a.** Prouver, en adaptant la preuve de l'unicité de la différentielle, qu'une norme n'est jamais différentiable en 0.

b. Déterminer en quels points est différentiable la norme N_1 définie sur $\mathbb{R}^n$.

8. Soit $f : I \times J \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, I et J désignant deux intervalles ouverts de $\mathbb{R}$. On supposera que f satisfait à toutes les hypothèses de domination dont on aura besoin. Soit par ailleurs une fonction u de classe $\mathcal{C}^1$ de J dans I. Pour $x \in J$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_a^{u(x)} f(t,x)\,\mathrm{d}t$ où a désigne un point de I.

Calculer la dérivée de F.

---

9. On définit l'ouvert U de $\mathbb{R}^2$ suivant : $U = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x > 0,\ y > 0\right\}$, et l'on cherche les fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ vérifiant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{y}{1+xy} - \dfrac{y}{x^2} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{x}{1+xy} + \dfrac{\alpha}{x} \end{cases}$$

a. Déterminer, grâce à un théorème du cours, la seule valeur du paramètre α pour laquelle f peut exister.
b. Donner, pour cette valeur de α, une solution du système proposé.
c. Donner *toutes* les solutions du système.

10.* Identité d'Euler :

Une fonction f, définie sur un cône U (c'est-à-dire une partie U d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E telle que $\forall x \in U, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda x \in U$), est dite a-homogène si pour tout x de U et tout réel strictement positif λ, on a $f(\lambda x) = \lambda^a f(x)$. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un cône ouvert U. Prouver que f est a-homogène sur U si et seulement si l'on a $\mathrm{d}f(x).x = a\, f(x)$ pour tout x de U (on pourra avant toute chose considérer la fonction $g(t) = f(tx) - t^a f(x)$, et calculer sa dérivée).

---

11. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : U \to \mathbb{C}$. On dit que f est *holomorphe* au point $a \in U$ si $\displaystyle\lim_{h \to 0, h \in \mathbb{C}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ existe dans $\mathbb{C}$. Pour $z = x + iy \in U$, on note $f(z) = P(x,y) + \mathrm{i}Q(x,y)$, P et Q étant à valeurs réelles.

a. On assimile $\mathbb{C}$ (vu comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel) à $\mathbb{R}^2$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur une matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pour que l'endomorphisme de $\mathbb{C}$ qu'elle représente dans la base canonique soit de la forme $z \mapsto \ell z$ où ℓ est un certain complexe.

b. Prouver que f est holomorphe en a si et seulement si f est différentiable en a avec les conditions (dites « de Cauchy », encore lui !) : $\dfrac{\partial P}{\partial x}(a) = \dfrac{\partial Q}{\partial y}(a)$ et $\dfrac{\partial P}{\partial y}(a) = -\dfrac{\partial Q}{\partial x}(a)$.

c. Prouver que l'application $z \mapsto \dfrac{1}{z}$ est holomorphe en tout point de $\mathbb{C}^*$.

d. En déduire une justification de la formule un peu magique rencontrée dans la précédente feuille d'exercices :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = -\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)$$
