CALCUL MATRICIEL

1. Soit la matrice $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$. En écrivant $A=I_3+B$, calculer les puissances de A. Calculer A^{-1}.

2. Inverser la matrice dont tous les coefficients valent 1, sauf les diagonaux qui valent 0 (plusieurs méthodes !).

3. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Chercher les matrices X de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $X+(\mathrm{tr}X)A=B$.

4. On donne les deux matrices réelles A et C suivantes, et l'on se demande s'il existe une matrice B telle que $A=BC$.

$$A=\begin{pmatrix}-2&1&1\\8&1&-5\\4&3&-3\end{pmatrix}\quad;\quad C=\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&-1&-1\\-5&0&3\end{pmatrix}.$$

a. Par quel moyen peut-on résoudre ce problème élémentairement ? Qu'en pensez-vous ?

b. Quelle propriété simple aimerait-on que C vérifie pour répondre simplement à la question ? Est-ce le cas ici ?

Résoudre la question en revenant aux applications linéaires et en raisonnant sur leurs noyaux.

5. On donne les deux matrices A et B suivantes :

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\quad;\quad B=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Prouver que A et B sont semblables (on cherchera au préalable les matrices P telles que $PB=AP$).

6. Soit A élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice supposée non inversible. On désire prouver de 4 façons essentiellement différentes l'existence de B non nulle dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB=0$.

a. Construire une telle matrice B *via* ses matrices colonnes.

b. Construire B en exploitant une forme équivalente à A.

c. Revenir aux applications linéaires.

d. Considérer l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ $\Phi : M\mapsto AM$: quelle propriété n'a-t-il pas ? que veut-on ?

7. Prouver que toute matrice carrée est somme de deux matrices inversibles. En déduire qu'il existe une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ constituée de matrices inversibles. Expliciter une telle base.

8. Quelles sont les matrices carrées qui ne sont semblables qu'à elles-mêmes ? (on pourra utiliser l'exercice **7.**).

9. On se donne deux matrices carrées A et B telles que $AB=0$ et $A+B$ est inversible. Calculer $\mathrm{rg}A+\mathrm{rg}B$.

10. Calculer la trace et le déterminant de l'endomorphisme de transposition de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

11*. Soit A une matrice carrée réelle inversible. Montrer que A et A^{-1} sont à coefficients positifs si, et seulement si, A est à coefficients positifs et ne possède qu'un terme non nul par ligne et par colonne.

12. Soit p la projection vectorielle de $\mathbb{R}^3$ sur le plan P d'équation $x+y+z=0$ parallèlement à la droite D d'équation $x=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{3}$.

a. Vérifier que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.

b. Soit $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Déterminer $p(u)$ et donner la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

c. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de p est diagonale.

13. Soit la matrice $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{bmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par $f(M)=AM$.

a. Déterminer une base de $\ker f$.

b. f est-il surjectif ?

c. Déterminer une base de $\operatorname{Im} f$.

d. A-t-on $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \ker f \oplus \operatorname{Im} f$?

14. Soit A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et $\tilde{A}$ sa comatrice. On veut déterminer le rang de $\tilde{A}$ suivant le rang de A.

a. Prouver que $\operatorname{rg}(A)=n \Rightarrow \operatorname{rg}(\tilde{A})=n$ et que $\operatorname{rg}(A)\leq n-2 \Rightarrow \tilde{A}=0$.

b. Prouver que $\operatorname{rg}(A)=n-1 \Rightarrow \operatorname{rg}(\tilde{A})=1$ (on majorera au préalable $\operatorname{rg}(\tilde{A})$).

c. Déterminer le déterminant de $\tilde{A}$ en fonction de celui de A.

d. Déterminer $\tilde{\tilde{A}}$.

15*. Soit π une application *non constante* de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$ telle que, pour tout couple (A,B) de matrices :

$$\pi(AB)=\pi(A)\times\pi(B).$$

a. Que vaut $\pi(I_n)$?

b. Prouver que si A est inversible, $\pi(A)\neq 0$.

c. Que vaut $\pi(A)$ si A est nilpotente ?

d. Que vaut $\pi(A)$ si A est non inversible ?

16*. Incontournable !

Une matrice carrée complexe $A=(a_{i,j})$ est dite « à diagonale dominante » si pour tout i, on a $\left|a_{i,i}\right| > \sum_{j\neq i}\left|a_{i,j}\right|$. Prouver qu'une telle matrice est inversible (on pourra raisonner par contraposition, en considérant une matrice non inversible, et en écrivant une relation de dépendance linéaire de ses colonnes).

17. **a.** Prouver que si A et B sont semblables, alors $A-\alpha I_n$ et $B-\alpha I_n$ le sont ($\alpha\in\mathbb{K}$), ainsi que A^p et B^p.

b. On donne les matrices suivantes. Lesquelles sont semblables entre elles ?

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\0&2&1&0\\0&0&-1&1\\0&0&0&-1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

18. Soit u un endomorphisme non nul de $\mathbb{K}^3$ tel que $u^2=0$. Que vaut le rang de u ? Prouver l'existence d'une base dans laquelle la matrice de u est : $\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.