Reprendre le programme précédent de calcul matriciel.

Pour les colles du lundi et du mardi, merci de vous contenter de faire diagonaliser ou trigonaliser une matrice 3-3 et de ne pas demander d'exercice théorique. Pour trigonaliser, je privilégie l'utilisation des sous-espaces caractéristiques (sans les avoir nommés ainsi). En d'autres termes, pour arriver à une forme triangulaire du type $\begin{pmatrix} \lambda & \alpha & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$ *(par exemple), mes élèves doivent être capables de se raconter que* e_2 *doit être cherché dans* $\ker(u - \lambda Id_E)^2$.

Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

A priori, l'espace de travail est de dimension finie. Je me contente de dire au fur et à mesure quels sont les notions et théorèmes qui restent valables en dimension quelconque.

1. Sous-espaces stables

Caractérisation matricielle d'un endomorphisme stabilisant un sous-espace F de E. Déterminant d'une matrice de la forme $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$. Caractérisation matricielle d'un endomorphisme stabilisant $F_1, F_2, \dots, F_p$ avec $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_p$. Déterminant d'un tel endomorphisme.

2. Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres

Définition des valeurs propres (leur ensemble forme le spectre de u), des vecteurs propres (0 n'en est pas un par convention), des sous-espaces propres.

Une somme de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes est directe.

Polynôme caractéristique (il est unitaire, c'est désormais officiel). Les valeurs propres de u sont les racines dans $\mathbb{K}$ de P_u.

La dimension d'un espace propre est plus petite que la multiplicité de la valeur propre dans P_u.

Définitions équivalentes d'un endomorphisme diagonalisable.

Théorème : u est diagonalisable si et seulement si P_u est scindé dans et si la dimension de chaque espace propre est égale à la multiplicité de la valeur propre dans P_u. En particulier, si P_u est scindé dans $\mathbb{K}$ et si toutes ses racines sont simples, u est diagonalisable.

Valeurs propres d'une matrice carrée (ce sont les scalaires λ pour lesquels il existe une matrice colonne non nulle X telle que $AX = \lambda X$). Polynôme caractéristique, matrices diagonalisables.

Endomorphismes et matrices trigonalisables. u est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé. Pratique de la trigonalisation.

Adaptation de tous les résultats précédents en termes de réduction des matrices. Ne pas hésiter à faire réduire une matrice de taille raisonnable à la forme diagonale ou triangulaire.