Pour les colles des lundi, mardi et mercredi :

Reprendre les programmes précédents de réduction.

ESPACES PRÉHILBERTIENS (RÉELS)

Produits scalaires réels, exemples les plus classiques.
Inégalité de Cauchy-Schwarz, cas d'égalité, norme euclidienne associée au produit scalaire.
Théorème de Pythagore.
☞ Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.
Orthogonal d'un sous-espace vectoriel.

Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E, alors E est somme directe de F et de son orthogonal, et le double orthogonal de F est F. Projection orthogonale sur F.

Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E, et si x est un élément de E quelconque, la distance de x à F est atteinte en un point unique de F qui est le projeté orthogonal de x sur F.

À partir de jeudi, rajouter :

ESPACES EUCLIDIENS

Attention, les modifications de programme ont été importantes dans ce chapitre !

Existence de bases orthonormées. Théorème de la « base orthonormée incomplète ». Existence d'un supplémentaire orthogonal pour tout sous-espace de E.
Matrice de passage d'une base orthonormée à une autre, matrices orthogonales, groupe orthogonal, groupe spécial orthogonal.
Orientation d'un espace euclidien,
Isomorphisme naturel entre un espace euclidien et son dual.
Définition d'une isométrie. Matrice d'une isométrie dans une base orthonormée.
Produit mixte dans un espace orienté, produit vectoriel (je n'ai donné sa définition qu'en dimension 3).
Classification des isométries de $\mathbb{R}^2$ euclidien orienté (plus de $\mathbb{R}^3$).
Forme réduite d'une isométrie dans le cas général.

Adjoint d'un endomorphisme, matrice de l'adjoint dans une base orthonormée.
Principales propriétés de l'adjonction (calquées sur celles de la transposition).
Noyau, image de l'adjoint.
Endomorphismes auto-adjoints (terminologie désormais préférée à celle d'endomorphisme symétrique).
Diagonalisation des endomorphismes auto-adjoints dans une base orthonormée (théorème spectral).

Endomorphismes symétriques positifs, définis positifs. Caractérisation par leur spectre.
Tout endomorphisme de la forme $u^* \circ u$ est symétrique positif et, réciproquement, tout endomorphisme symétrique positif est de cette forme.