

## SÉRIES ENTIÈRES

Rayon de convergence d'une série entière complexe  $\sum a_n z^n$ .

La série converge absolument pour  $|z| < R$ , diverge grossièrement (*i.e.* le terme général de la série ne tend pas vers 0) pour  $|z| > R$ .

Disque (ouvert) et intervalle (ouvert) de convergence. La série entière converge normalement sur tout disque de centre 0 et de rayon  $r$  avec  $0 \leq r < R$ . Continuité de sa somme.

☞ Rayon de convergence d'une somme, d'un produit de Cauchy, de deux séries entières.

Formule de d'Alembert ( $R = \lim_n \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$ , quand cette limite existe, bien sûr !).

☞  $\sum a_n z^n$  et  $\sum n a_n z^n$  ont même rayon de convergence. Application à la dérivation terme à terme (à un ordre quelconque) d'une série entière sur son intervalle de convergence. Expression des  $a_n$  en fonction des dérivées successives, unicité du développement en série entière.

Développements en série entière usuels

*Les variations autour de la série géométrique donnent la plupart des autres développements (en particulier celui des fractions rationnelles). Pour la série du binôme  $(1+x)^\alpha$ , je ne raisonne pas de manière tout à fait standard : je pars du résultat présumé (la série dont les coefficients sont ceux du développement limité) et prouve qu'elle est solution de la même équation différentielle que  $(1+x)^\alpha$ .*

**Pour gagner un peu de temps, je n'ai pas parlé de l'utilisation d'une équation différentielle pour développer une fonction en série entière, ou, inversement, de l'utilisation des séries entières pour intégrer une équation différentielle. Ces choses sont renvoyées au cours sur les équations différentielles.**

## FAMILLES SOMMABLES

Le programme est plutôt ambitieux à ce sujet et c'est assez effrayant compte-tenu des difficultés que rencontre un élève de MP standard à étudier une pauvre série. Pire ! Un illuminé complet qui n'a dû connaître dans sa carrière que des maths-sup de Louis-le-Grand a trouvé le moyen de mettre ça au programme de MPSI !!! On croit rêver...

Bref, je vous renvoie à mon poly qui figure sur mon site.

Contentez-vous, s'il vous plaît, de faire étudier quelques séries doubles simples qu'il s'agira de sommer par paquets de plusieurs façons. Le plus important est que mes élèves n'oublient pas que les diverses justifications se font à partir de l'étude de la famille des modules.