VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES

Une variable aléatoire discrète sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est une application X de Ω dans un certain ensemble E tel que $X(\Omega)$ soit au plus dénombrable (c'est-à-dire fini ou dénombrable) et telle que $\forall\, x \in X(\Omega),\ \overset{-1}{X}(\{x\}) \in \mathcal{A}$.

Loi d'une variable aléatoire discrète.

Notation $(X = x)$, $(X > x)$ et autres du même type.

Couples de variables aléatoires, loi conjointe, lois marginales.

Variables aléatoires indépendantes, familles de variables mutuellement indépendantes.

Si $X_1, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendantes, alors $f(X_1, \ldots, X_p)$ et $g(X_{p+1}, \ldots, X_n)$ sont indépendantes (admis).

Lois usuelles : loi de Bernoulli, loi binomiale, loi géométrique (présentée comme loi du rang du premier succès dans une suite d'épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre p), loi de Poisson.

Caractérisation de la loi géométrique comme loi sans mémoire : $P(X > k + n \mid X > n) = P(X > k)$.

Approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson : si pour tout n, X_n suit une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(n, p_n)$ avec $np_n \underset{n\infty}{\to} \lambda$, alors $P(X_n = k) \underset{n\infty}{\to} \mathrm{e}^{-\lambda} \dfrac{\lambda^k}{k!}$. Interprétation comme loi des événements rares.

Une variable aléatoire réelle discrète X possède une espérance si la famille $(xP(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable ; la somme de cette famille est alors l'espérance de X notée $\mathrm{E}(X)$.

Espérance des lois usuelles.

Linéarité de l'espérance (je ne la prouve plus après le bide que j'ai rencontré les années passées !), positivité, croissance.

Si $|X| \leq Y$ et si Y possède une espérance, alors X possède une espérance.

Formule de transfert (admise dans le cours mais prouvée dans un document distribué aux élèves ; j'estime que ce genre de preuves, très techniques, ne leur apporte pas grand-chose) : soit f une fonction définie sur $X(\Omega)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Alors $f(X)$ possède une espérance si et seulement si la famille $\big(f(x)P(X = x)\big)_{x \in X(\Omega)}$ est sommable et dans ce cas :

$$\mathrm{E}(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x) P(X = x).$$

Si X et Y possèdent une espérance et sont indépendantes, alors XY possède une espérance et $\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$ (résultat prouvé grâce à la formule de transfert dans le document sus-nommé).

Moments d'ordre k. Si X possède un moment d'ordre k, elle possède un moment d'ordre p pour tout p plus petit que k.

Variance, écart-type.

Variance des lois usuelles.

Inégalité de Markov, inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Variance d'une somme finie de variables aléatoires deux à deux indépendantes.

Loi faible des grands nombres.