Reprendre, le cas échéant, le chapitre sur les équations différentielles.

INTÉGRALES IMPROPRES

On pourra se limiter aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Convergence des intégrales impropres *via* les intégrales partielles. Toute étude de convergence doit être précédée de la mention « la fonction intégrée est continue sur… » et ce pour éviter les études débiles de convergence en une borne en laquelle la fonction est continue.

Intégrales de référence.

Règles de comparaison (majoration, équivalent) pour les fonctions positives.

Quand une fonction possède une limite finie en un point fini, je parle d'intégrale « faussement impropre ».

Absolue convergence (elle entraine la convergence).

Intégration par parties : pas de théorème. Elles peuvent être faites directement sous forme impropre, à la condition expresse qu'il y ait une vérification *a posteriori* de la validité du résultat (par finitude du crochet ou par convergence de la nouvelle intégrale).

Changements de variable : les « classiques » (ln, puissance, exponentielle) peuvent être effectués directement sans justification. Les moins classiques doivent être effectués sous forme propre, suivis d'un passage à la limite, ou en utilisant le théorème suivant :

Intégration des relations de comparaison (théorèmes analogues à ceux des séries positives).

PREMIERS PAS DANS LA THÉORIE DE LEBESGUE

Les énoncés de ces deux théorèmes doivent être pouvoir donnés sans la moindre approximation.

Théorème de convergence dominée : Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (voire dans un espace normé de dimension finie E).

On suppose que :

i. la suite (f_n) converge simplement sur I vers une certaine fonction f ;

ii. f et les f_n sont continues par morceaux sur I ;

iii. il existe une fonction φ positive et sommable sur I telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in I,\ \left\|f_n(t)\right\| \leq \varphi(t)$.

Alors f et les f_n sont sommables sur I et l'on a :

$$\int_I f(t)\mathrm{d}t = \lim_n \int_I f_n(t)\mathrm{d}t\,.$$

Théorème (intégration terme à terme) : Soit (u_n) une suite de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans un espace de dimension finie E.

On suppose que :

i. la série $\sum u_n$ converge simplement sur I ;

ii. les u_n sont continues par morceaux sur I ;

iii. la fonction $S : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)$ est continue par morceaux sur I ;

iv. les u_n sont intégrables sur I ;

iv. la série $\sum \int_I \left\| u_n(t) \right\| \mathrm{d}t$ est convergente.

Alors S est intégrable sur I et l'on a :

$$\int_I S(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I u_n(t)\mathrm{d}t\,.$$