En ce qui concerne la topologie, je sais qu'il n'est pas très logique de finir l'année par elle puisqu'elle devrait être le socle de tout le cours d'analyse. Si je la rejette à la fin, c'est pour éviter d'assommer mes élèves en tout début d'année avec un cours qu'ils ne comprennent pas, mais aussi dans un souci de pure efficacité : ça ne tombe que très peu aux concours et je peux adapter le temps que j'y consacre au temps qu'il me reste pour finir le programme.

Merci de ne donner que des exercices relativement basiques permettant de juger de la connaissance des définitions et de la compréhension des concepts-clés.

TOPOLOGIE DES EVN (partie 2)

1. Applications d'un e.v.n dans un autre

Limite d'une fonction en un point adhérent à son ensemble de définition. Fonctions continues.

Invariance de ces notions dans le cas de normes équivalentes.

Opérations sur les limites : linéarité, produit, composition.

Si f est continue de A dans F, l'image réciproque par f de tout ouvert de F est un ouvert de A. Propriété analogue pour les fermés.

☞ Une fonction f possède une limite l en un point a si et seulement si, pour toute suite (x_n) convergeant vers a, la suite $\left(f(x_n)\right)$ converge vers l.

Fonctions lipschitziennes, fonctions uniformément continues.

☞ L'image continue d'un compact est un compact. Toute application numérique continue sur un compact est donc bornée et atteint ses bornes.

Théorème de Heine.

2. Cas de la dimension finie

Équivalence des normes (admise).

Caractérisation des compacts (admise)

3. Connexité par arcs

La notion générale de partie connexe d'un espace vectoriel normé est hors programme.

Parties connexes par arcs.

Caractérisation des parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$.

L'image continue d'une partie connexe par arcs est connexe par arcs (théorème des valeurs intermédiaires).

4. Continuité des applications linéaires

☞ Différentes caractérisations des applications linéaires continues.

Norme subordonnée d'une application linéaire continue (de nouveau au programme).

☞ Continuité d'une application bilinéaire vérifiant $\forall x,y \in E, \left|B(x,y)\right| \leq K \left\|x\right\| \times \left\|y\right\|$ (pas d'équivalence au programme).

Cas où l'espace de départ est de dimension finie.