DÉRIVATION

Toutes les fonctions sont définies sur un intervalle non trivial I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$ ou dans un espace vectoriel normé de dimension finie.

1. Dérivée première en un point

Dérivabilité d'une fonction en un point.
Équivalence avec l'existence d'un développement limité à l'ordre 1 en ce point.
Continuité en a d'une fonction dérivable en a.
Opérations sur les fonctions dérivables
- Linéarité de la dérivation.
- Dérivée d'un produit $b(f,g)$ où b est une application bilinéaire continue.
- Dérivée d'une composée.
- Dérivée de $u(f)$ où u est linéaire continue.

Fonctions dérivables sur un intervalle, fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

2. Accroissements finis

L'inégalité : Si f et g sont continues sur $[a,b]$, dérivables sur $]a,b[$ et vérifient $\|f'(t)\| \leq g'(t)$ pour tout t de $]a,b[$, alors $\|f(b)-f(a)\| \leq g(b)-g(a)$. Cas particulier où $g(t)=kt$.

Corollaires

☞ Théorème de Rolle, des accroissements finis (sous leurs hypothèses classiques : f est continue sur le fermé et dérivable sur l'ouvert).

« Théorème de la limite de la dérivée » : si f est continue sur I, dérivable sur $I-\{a\}$ et si f' a une limite ℓ en a, alors f est dérivable en a de dérivée ℓ.

☞ Caractérisation des fonctions dérivables lipschitziennes.

Cas des fonctions numériques

☞ Théorème de Rolle, des accroissements finis (sous leurs hypothèses classiques : f est continue sur le fermé et dérivable sur l'ouvert).

☞ Application à l'étude du sens de variations d'une fonction dérivable.

3. Dérivée d'une réciproque

Si f est une fonction numérique continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et si f est strictement monotone, f réalise un homéomorphisme de I sur $f(I)$ (admis).

☞ Sous ces hypothèses, f^{-1} est dérivable en $f(a)$ si et seulement si $f'(a) \neq 0$ et, dans ce cas, $(f^{-1})'(f(a)) = \dfrac{1}{f'(a)}$.

Notion de $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme. Une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur I réalise un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de I sur $f(I)$ si et seulement si f' ne s'annule pas sur I.

4. Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

Définition des dérivées successives en un point. Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur un intervalle.

Formule de Leibniz. Composition des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$.

5. Formules de Taylor

☞ Théorème de Taylor avec reste intégrale. Inégalité de Taylor-Lagrange.

Théorème de Taylor-Young (existence en tout point d'un développement limité à l'ordre n pour une fonction de classe $\mathcal{C}^n$).

J'ai lourdement insisté sur l'opposition local/global de ces deux résultats.

6. Fonctions convexes

Principales propriétés (géométriques et différentielles) des fonctions convexes (rappels de MPSI). Inégalités de convexité (en particulier, comparaison des moyennes arithmétique, géométrique, harmonique et quadratique).