Le chapitre sur les suites et séries de fonctions est central dans le programme d'analyse de MP. Tous les théorèmes qui suivent doivent pouvoir être cités sans la moindre erreur sur les hypothèses (en particulier sur les ensembles de départ et d'arrivée). Je les ai tous prouvés en termes de suites, puis ai adapté leur énoncé en termes de séries. Je vous demanderai de donner à chaque élève un exercice portant sur l'étude d'une fonction définie par une série, sans difficulté particulière, afin de bien tester si ces théorèmes fondamentaux sont correctement assimilés.

L'expérience prouve qu'ils sont généralement connus, mais mal exploités faute d'une maîtrise suffisante dans l'étude des séries. Merci de signaler à chaque élève, s'il y a lieu, la vraie nature de ses difficultés devant ces exercices.

SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS

Toutes les fonctions sont définies sur une partie A d'un espace vectoriel normé E, et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (voire plus généralement dans un espace vectoriel normé de dimension finie).

1. Convergence simple et uniforme

Convergence simple, convergence uniforme d'une suite de fonctions. Pour les fonctions bornées, la convergence uniforme équivaut à la convergence au sens de la norme n_∞.

Les élèves doivent avoir compris la différence entre ces deux modes de convergence, doivent pouvoir établir sur des exemples simples si une convergence est uniforme ou non (via une étude de fonctions dans certains cas) mais l'étude systématique de ces notions n'est pas un objectif du programme.

Convergence simple, convergence uniforme d'une série de fonctions. Convergence normale.

La convergence normale entraîne la convergence uniforme.

Les quelques exemples de convergence uniforme non normale que rencontreront les élèves reposent en général sur la majoration du reste d'une série alternée (puisque la règle d'Abel est hors programme).

2. Propriétés de régularité d'une limite

Théorème 1 : Une limite uniforme de fonctions bornées est bornée et, sous ces hypothèses, les fonctions sont uniformément bornées.

Théorème 2 : Si a est un point de A, si les f_n sont continues en a et convergent uniformément vers f sur A, alors f est continue en a. Plus généralement, si les f_n sont continues sur A et convergent uniformément vers f, alors f est continue sur A.

Théorème 3 : *Ce résultat a été admis puisque le critère uniforme de Cauchy ne figure plus au programme.*

Si a est un point adhérent à A, si les f_n ont toutes une limite ℓ_n en a et convergent uniformément vers f, alors :

i. la suite (ℓ_n) est convergente. Soit ℓ sa limite.

ii. f possède une limite en a égale à ℓ.

Théorème 4 : Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, si les f_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, convergent simplement sur I vers f, et si les dérivées $f_n{}'$ convergent uniformément sur tout segment inclus dans I vers g, alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $f' = g$.

Théorème 5 : Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, si les f_n sont de classe $\mathcal{C}^k$ sur I, convergent simplement sur I vers f, si les suites des dérivées jusqu'à l'ordre $k-1$ convergent simplement sur I, et si les dérivées $f_n^{(k)}$ convergent uniformément sur tout segment inclus dans I, alors f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I, et pour tout p compris entre 1 et k, la dérivée p-ième de f est la limite de la suite des dérivées d'ordre p des f_n.

Bien entendu, il convient d'ajouter à tous ces théorèmes leur version « séries de fonctions ».