1. Soit p un entier non nul quelconque. Pour $X=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, on pose :

$$N_p((x_1,\dots,x_n))=\sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p}\ .$$

a. Prouver que l'application $x\mapsto x^p$ est convexe sur $\mathbb{R}^+$.

Sa dérivée seconde est positive.

b. Soient X et Y deux vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^n$ tels que $N_p(X)+N_p(Y)=1$.

En écrivant $a+b=N_p(X)\dfrac{a}{N_p(X)}+N_p(Y)\dfrac{b}{N_p(Y)}$, prouver pour tous réels positifs a et b l'inégalité :

$$(a+b)^p\le N_p(X)\frac{a^p}{N_p(X)^p}+N_p(Y)\frac{b^p}{N_p(Y)^p}\ .$$

C'est la conséquence immédiate, par définition même, de la convexité de la fonction $x\mapsto x^p$.

En déduire que $N_p(X+Y)\le 1$.

On écrit, pour $i=1\dots n$, $(|x_i|+|y_i|)^p\le N_p(X)\dfrac{|x_i|^p}{N_p(X)^p}+N_p(Y)\dfrac{|y_i|^p}{N_p(Y)^p}$ *puis on somme ces inégalités.*

c. Prouver que N_p définit une norme sur $\mathbb{R}^n$.

Il va de soi que seule l'inégalité triangulaire pose problème.

On a prouvé à la question précédente que $N_p(X)+N_p(Y)=1\Rightarrow N_p(X+Y)\le 1$.

Si maintenant X et Y sont quelconques, on utilise le résultat précédent avec $\dfrac{X}{N_p(X)+N_p(Y)}$ *et* $\dfrac{Y}{N_p(X)+N_p(Y)}$.

d. Déterminer, pour X fixé dans $\mathbb{R}^n$, la limite de la suite $(N_p(X))_p$.

Dans l'expression de $N_p(X)$, *on met en facteur la plus grande coordonnée de X (en valeur absolue), c'est-à-dire la norme infinie de X. On obtient alors :*

$$N_p(X)=N_\infty(X)\sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{x_i}{N_\infty(X)}\right|^p}\quad ;$$

Dans la somme sous le radical, l'un au moins des termes vaut 1 (peut-être plusieurs si la norme infinie de X est réalisée pour plusieurs de ses coordonnées) et les autres sont des suites géométriques de raisons strictement plus petites que 1. Bref, la somme sous le radical tend vers 1, 2… ou n. Étant élevée à la puissance $1/p$, *la totalité du radical tend vers 1 et la suite* $(N_p(X))_p$ *converge donc, c'était prévisible, vers* $N_\infty(X)$.

2. Soit E l'espace des fonctions numériques continues sur $[a,b]$. Pour $f\in E$ et $p\in\mathbb{N}^*$, on pose :

$$n_p(f)=\sqrt[p]{\int_a^b |f(t)|^p\,\mathrm{d}t}\ .$$

a. Prouver que l'application n_p ainsi définie est une norme sur E (on utilisera le résultat de la question **1.**).

Ici encore, seule l'inégalité triangulaire pose problème. On reprend très exactement la même démarche que dans les questions ***1.a.*** *et* ***1.b.*** *mais, au lieu de sommer des inégalités, on les intègre.*

On fixe désormais un élément non nul f de E et l'on cherche à déterminer la limite de la suite $(n_p(f))$.

Soit $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < n_\infty(f)$, et c un point de $[a,b]$ en lequel $|f|$ atteint son maximum. On supposera (pour fixer les idées) que c ne vaut ni a ni b (dans le cas contraire, la preuve s'adapte sans difficulté).

b. Justifier l'existence de c.

La fonction f est continue sur un segment, elle y atteint ses bornes.

c. Prouver l'existence d'un réel $\alpha > 0$ tel que :

$$\sqrt[p]{2\alpha}\,(n_\infty(f)-\varepsilon) \leq n_p(f) \leq \sqrt[p]{b-a}\ n_\infty(f)\,.$$

L'inégalité de droite est une évidence.

En ce qui concerne celle de gauche, on utilise la continuité de f au point c :

$$\exists \alpha > 0 \ / \ \forall t \in [c-\alpha, c+\alpha[,\ |f(t)| \geq n_\infty(f)-\varepsilon\,.$$

On élève alors à la puissance p et on intègre :

$$\int_a^b |f(t)|^p \mathrm{d}t \geq \int_{c-\alpha}^{c+\alpha} |f(t)|^p \mathrm{d}t \geq 2\alpha\big(n_\infty(f)-\varepsilon\big)^p\,.$$

Il ne reste plus qu'à prendre la racine p-ième.

d. Conclure soigneusement.

Dans l'inégalité précédente, le minorant tend vers $n_\infty(f)-\varepsilon$ quand n tend vers l'infini, il devient donc plus grand que $n_\infty(f)-2\varepsilon$ pour n assez grand. De même, le majorant tend vers $n_\infty(f)$, il devient plus petit que $n_\infty(f)+\varepsilon$. Finalement, pour n assez grand, on a :

$$n_\infty(f)-2\varepsilon \leq n_p(f) \leq n_\infty(f)+2\varepsilon\,,$$

on en conclut que la suite $\big(n_p(f)\big)$ converge vers $n_\infty(f)$.

3. Soient p et q deux entiers non nuls tels que $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$. On souhaite démontrer l'inégalité de Hölder qui affirme que si f et g sont deux fonctions numériques continues (non nulles sinon c'est trivial !) sur $[0,1]$, alors :

$$\int_0^1 |fg| \leq n_p(f)\,n_q(g)\,.$$

a. Prouver que si u et v sont deux réels positifs, alors :

$$uv \leq \frac{u^p}{p}+\frac{v^q}{q}\,.$$

L'inégalité est évidente si u ou v est nul. Sinon, on utilise une inégalité de concavité du logarithme :

$$\ln\Big(\frac{u^p}{p}+\frac{v^q}{q}\Big) \geq \frac{1}{p}\ln u^p + \frac{1}{q}\ln v^q = \ln u + \ln v = \ln(uv)\,,$$

et ile reste plus qu'à prendre l'exponentielle.

b. Prouver l'inégalité de Hölder dans le cas particulier où $n_p(f)=n_q(g)=1$.

On écrit $|fg| \leq \dfrac{|f|^p}{p}+\dfrac{|g|^q}{q}$ et on l'intègre :

$$\int_0^1 |fg| \leq \int_0^1 \Big(\frac{|f|^p}{p}+\frac{|g|^q}{q}\Big) = \frac{1}{p}n_p(f)^p + \frac{1}{q}n_q(g)^q = \frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1 = n_p(f)\,n_q(g)\,.$$

c. La prouver dans le cas général en se ramenant au cas précédent.

On se ramène au cas précédent en envisageant $\dfrac{f}{n_p(f)}$ et $\dfrac{g}{n_q(g)}$.