Notions sur les ensembles dénombrables

L'ambition de ce polycopié est des plus modestes : il s'agit, sans bien entendu remonter à la genèse de la théorie des ensembles (ni encore moins soulever de problème théorique, voire philosophique), de préciser quelques résultats de base sur la notion de *cardinal* d'un ensemble, et d'étudier plus particulièrement la notion d'ensemble *dénombrable*, c'est-à-dire, intuitivement, d'ensemble infini dont on peut « numéroter » les éléments.

1. Cardinal d'un ensemble

Première définition, et premier problème : c'est quoi un ensemble ? Ne comptez pas sur moi pour vous le dire ici, et contentez-vous de la notion intuitive d'ensemble que la sagesse populaire vous a léguée.

Définition :
Deux ensembles A et B sont dits *équipotents* s'il existe une bijection de A sur B.

On vérifie sans peine (compositions de bijections) que l'on définit ainsi une relation d'équivalence (il y a là un petit abus : une relation d'équivalence est censée être définie sur un ensemble. Or notre relation d'équipotence est définie sur « l'ensemble de tous les ensembles », et celui-ci n'est pas un ensemble ! Passons sans faire de vagues...).

La classe d'équivalence d'un ensemble pour la relation d'équipotence sera dite *cardinal* de cet ensemble.

Notons qu'il est alors possible de donner la première définition rigoureuse d'un ensemble *fini* : c'est un ensemble qui n'est équipotent à aucun de ses sous-ensembles autres que lui-même. Le cardinal d'un tel ensemble sera dit fini. On peut alors prouver que la « collection » des cardinaux finis constitue un ensemble : celui-ci sera noté $\mathbb{N}$ et appelé *ensemble des entiers naturels.*

Dernier point : autant il est évident pour tout le monde qu'il existe des tas de cardinaux finis possibles (et même une infinité), autant dès que l'on passe aux ensembles infinis les choses paraissent nettement moins claires : pourtant, c'est un fait, il existe une infinité d'infinis ! Plus précisément, on a le résultat suivant :

Théorème (Cantor) :

Soit E un ensemble. Alors il n'existe pas de bijection de E sur $\mathcal{P}(E)$, ensemble des parties de E.

Ainsi, si l'on prend un ensemble infini E quelconque, E n'est pas équipotent à $\mathcal{P}(E)$. Puisque E s'injecte trivialement dans $\mathcal{P}(E)$ par l'application $x \mapsto \{x\}$, c'est donc que l'infini de $\mathcal{P}(E)$ est « strictement plus grand » que celui de E.

Preuve : Par l'absurde. Soit f une bijection de E sur $\mathcal{P}(E)$. Construisons une partie de E en posant :

$$A = \{x \in E \,/\, x \notin f(x)\}.$$

Puisque f est une bijection de E sur $\mathcal{P}(E)$, A possède un antécédent par f : notons le x_0.

Alors, par définition même de la partie A, il vient

$$x_0 \notin A \Leftrightarrow x_0 \in f(x_0) \Leftrightarrow x_0 \in A \ !$$

On notera que ce résultat qui vient d'être prouvé a pour conséquence, entre autres, que l'ensemble de tous les ensembles n'est pas un ensemble. En effet, s'il en était un, il devrait avoir pour éléments toutes ses propres parties (puisque ce sont des ensembles), et son cardinal serait donc plus grand que celui de l'ensemble de ses parties.

Dans toute la suite de ce document, les propriétés usuelles de l'ensemble $\mathbb{N}$ et des ensembles finis seront supposées connues.

2. La notion d'ensemble dénombrable

Définition :

Un ensemble X est dit *dénombrable* s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$ (ou, ce qui revient au même, s'il est équipotent à $\mathbb{N}$).

Exemple 1 : $\mathbb{Z}$ est dénombrable

C'est tout simple, il suffit pour cela de construire l'application ϕ suivante, qui est évidemment une bijection entre $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{N}$:

$$0 \mapsto 0, 1 \mapsto 1, -1 \mapsto 2, 2 \mapsto 3, -2 \mapsto 4, \dots, n \mapsto 2n-1, -n \mapsto 2n, \dots$$

Exemple 2 : $\mathbb{N}^2$ est dénombrable

C'est plus délicat ; il suffit de disposer les éléments de $\mathbb{N}^2$ dans une « matrice infinie », l'intersection de la ligne i et de la colonne j représentant le couple (i, j), et de les numéroter en diagonale comme suit :

	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**...**
0	0	2	5	9	14	
1	1	4	8	13		
2	3	7	12	$\iddots$		
3	6	11	$\iddots$			
4	10	16				
$\vdots$	15					

Il est possible de donner une démonstration arithmétique plus directe de ce résultat : il est en effet bien connu, d'après le théorème de décomposition en produit de facteurs premiers, que tout entier n non nul s'écrit de manière unique comme le produit d'une puissance de 2 par un nombre impair, c'est-à-dire sous la forme $2^a(2b+1)$. L'application ϕ, de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}^*$, qui au couple (a,b) associe l'entier $2^a(2b+1)$ est donc bijective et, par suite, $\mathbb{N}^2$ est dénombrable (en fait on n'a pas mis en bijection $\mathbb{N}^2$ avec $\mathbb{N}$ mais avec $\mathbb{N}^*$, ce qui est sans importance puisque $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^*$ peuvent eux-mêmes être mis en bijection par l'application $n \mapsto n+1$).

Exemple 3 : $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable

Pour prouver ce résultat, nous allons prouver que $[0,1[$ n'est pas dénombrable. En admettant momentanément que toute partie d'un ensemble dénombrable est soit finie soit dénombrable (résultat d'ailleurs tout à fait naturel !), on en déduit aisément que $\mathbb{R}$ ne saurait être dénombrable.

Supposons donc que $\mathbb{N}^*$ puisse être mis en bijection avec $[0,1[$: soit f une bijection de $\mathbb{N}^*$ sur $[0,1[$.

Soit a_1 la première décimale du développement décimal propre de $f(1)$. Soit a_2 la deuxième décimale du développement décimal propre de $f(2)$. Soit plus généralement a_n la $n^{\text{ième}}$ décimale du développement décimal propre de $f(n)$.

Choisissons un entier b_1 compris entre 0 et 8 et différent de a_1. Choisissons un entier b_2 compris entre 0 et 8 et différent de a_2. Plus généralement, choisissons un entier b_n compris entre 0 et 8 et différent de a_n.

Construisons à présent le nombre dont le développement décimal (propre puisque l'on a bien pris soin de prendre des b_k tous différents de 9) est le suivant : $x = 0, b_1 b_2 \ldots b_n \ldots$

Le nombre x est un élément de $[0,1[$, différent de $f(1)$ puisqu'ils n'ont pas la même première décimale, différent de $f(2)$ puisqu'ils n'ont pas la même seconde décimale, et plus généralement différent pour tout entier n de $f(n)$ puisqu'ils n'ont pas la même $n^{\text{ième}}$ décimale. Bref, x n'est pas le f de quelqu'un, f n'est donc pas surjective : contradiction.

Exemple 4 : toute partie infinie de $\mathbb{N}$ est dénombrable

En effet, soit P une partie infinie de $\mathbb{N}$. P étant non vide, P possède un plus petit élément $\phi(0)$.

$P-\{\phi(0)\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$ (P est infini), donc possède un plus petit élément $\phi(1)$.

Supposons construits les entiers $\phi(0),\phi(1),\dots,\phi(n)$. Alors, puisque P est infini, l'ensemble $P-\{\phi(0),\ \phi(1),\ \dots\ ,\ \phi(n)\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$, donc possède un plus petit élément $\phi(n+1)$.

On vient de construire ainsi une application ϕ de $\mathbb{N}$ dans P. Prouvons que ϕ est bijective :

par construction, ϕ est strictement croissante donc injective ;

prouvons que ϕ est surjective. Soit donc p un élément de P. Puisque ϕ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, ϕ tend évidemment vers l'infini à l'infini. D'autre part, p est un élément de P, donc p est plus grand que $\phi(0)$. Il existe donc un entier k tel que $\phi(k)\le p<\phi(k+1)$. Mais p est un élément de P et par construction, $\phi(k+1)$ est le plus petit élément de P qui soit strictement plus grand que $\phi(k)$. Il en résulte que $p=\phi(k)$, et donc que ϕ est surjective.

Soit alors un ensemble X supposé fini ou dénombrable (un tel ensemble sera dit *au plus dénombrable*). Si X est fini de cardinal p, il peut être mis en bijection avec $[[1,p]]$. S'il est dénombrable, il peut être mis en bijection avec $\mathbb{N}$. Inversement, soit Y un ensemble pouvant être mis en bijection avec une partie P de $\mathbb{N}$. Si P est fini, Y est lui-même fini. Si P est infini, P peut être mis en bijection avec $\mathbb{N}$ (cf. exemple 4.) et donc Y aussi par composition de bijections.

On a donc prouvé le résultat suivant :

<u>Propriété 1</u> :
Un ensemble est au plus dénombrable si et seulement s'il est en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$.

3. Critères de dénombrabilité

On établit ici quelques résultats simples permettant de prouver en pratique qu'un ensemble donné est dénombrable.

<u>Propriété 2</u> :
Soit X un ensemble. S'il existe une injection de X dans $\mathbb{N}$, alors X est au plus dénombrable.

<u>Preuve</u> : Soit f une injection de X dans $\mathbb{N}$. Alors l'application g de X dans $f(X)$, qui à un élément x de X associe $f(x)$, est évidemment bijective (on a rendu f surjective en restreignant son ensemble d'arrivée). On a ainsi construit une bijection de X sur une partie de $\mathbb{N}$, X est au plus dénombrable d'après la propriété 1.

Allié à la propriété 1., ce résultat permet de voir aisément qu'une partie d'un ensemble dénombrable est au plus dénombrable (ce que nous avons utilisé pour dire que $[0,1[$ n'étant pas dénombrable, $\mathbb{R}$ ne l'est pas non plus).

<u>Propriété 3</u> :
Soit X un ensemble. S'il existe une surjection de $\mathbb{N}$ sur X, alors X est au plus dénombrable.

<u>Preuve</u> : Soit σ une surjection de $\mathbb{N}$ sur X. Soit x un élément de X. σ étant surjective, l'ensemble des antécédents de x par σ est une partie non vide de $\mathbb{N}$. Soit $a(x)$ son plus petit élément.

Construisons une partie de $\mathbb{N}$ en posant $P = \{a(x),\ x \in X\}$. Alors l'application de P dans X qui à $a(x)$ associe x est évidemment une bijection ; on a mis X en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$, X est au plus dénombrable.

(N.B : qu'a-t-on fait ? Pour rendre σ injective, on a sélectionné un et un seul antécédent par σ de chaque élément x de X. Notant P l'ensemble de tous ces gens-là, il suffit de restreindre σ à P pour la rendre injective…).

<u>Théorème 2</u> :
Tout produit cartésien fini d'ensembles dénombrables est dénombrable.

<u>Preuve</u> : nous faisons ici la preuve dans le cas de deux ensembles dénombrables, le résultat général s'en déduisant aisément par récurrence (en effet, si $X_1, \dots, X_n$ sont des ensembles, on peut assimiler le produit cartésien $X_1 \times \ldots \times X_n$ à $(X_1 \times \ldots \times X_{n-1}) \times X_n$).

Soient X et Y deux ensembles dénombrables, f une bijection de $\mathbb{N}$ sur X, g une bijection de $\mathbb{N}$ sur Y. Alors il est clair que l'application h suivante est une bijection :

$$h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to X \times Y$$
$$(p,q) \mapsto (f(p), g(q))$$

On a mis ainsi $X \times Y$ en bijection avec $\mathbb{N}^2$, qui lui-même peut être mis en bijection avec $\mathbb{N}$ (cf. exemple 2.) : on en déduit bien que $X \times Y$ est dénombrable.

<u>Théorème 3</u> :

Toute réunion indexée par un ensemble au plus dénombrable d'ensembles au plus dénombrables est au plus dénombrable.

<u>Preuve</u> : quitte à compléter par des ensembles vides, nous pourrons toujours supposer que la réunion est indexée par un ensemble dénombrable (plutôt que fini) et pour simplifier les choses, nous pouvons toujours supposer que cet ensemble d'indices est $\mathbb{N}$. Soit donc $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille d'ensembles au plus dénombrables, et $D = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n$. Il existe toujours une surjection de $\mathbb{N}$ sur D_n (si D_n est dénombrable, c'est évident puisqu'il est en bijection avec $\mathbb{N}$, s'il est fini c'est encore plus facile !). Soit σ_n une telle surjection de $\mathbb{N}$ sur D_n. Alors l'application :

$$\phi : \begin{array}{l} \mathbb{N}^2 \to D \\ (n,p) \mapsto \sigma_n(p) \end{array}$$

est à peu prés clairement surjective. $\mathbb{N}^2$ étant lui-même dénombrable, la propriété 3. permet de conclure.

<u>Corollaire</u> :

$\mathbb{Q}$ est dénombrable.

<u>Preuve</u> : posons $\mathbb{Q}_n = \left\{ \dfrac{p}{q} ; |p| \leq n, |q| \leq n+1, q \neq 0 \right\}$: il est totalement évident que les ensembles $\mathbb{Q}_n$ sont finis et que $\mathbb{Q} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Q}_n$: $\mathbb{Q}$ apparaît ainsi comme une réunion dénombrable d'ensembles finis, $\mathbb{Q}$ est donc au plus dénombrable. Mais comme il n'est pas fini, il est dénombrable.

<u>Exemple 5</u> : l'ensemble A des réels algébriques sur $\mathbb{Q}$ est dénombrable.

Rappelons (?) que A est l'ensemble des réels qui sont racines d'un polynôme non nul à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

Soit $P = a_p X^p + \ldots + a_0$ un polynôme à coefficients entiers de degré p. Posons $\nu(P) = p + \sum_{k=0}^{p} |a_k|$ (l'entier $\nu(P)$ s'appelle le poids du polynôme P).

Pour n entier naturel, notons A_n l'ensemble des racines réelles des polynômes de poids plus petit que n. Il est parfaitement clair que la réunion des A_n est l'ensemble A. Reste à voir que chaque ensemble A_n est fini : il suffit pour cela de constater qu'il existe un nombre fini de polynômes de poids plus petit que n (un polynôme de poids plus petit que n a son degré majoré par n, et chacun de ses coefficients est un entier majoré par n en valeur absolue, ce qui ne lui laisse qu'un nombre fini de valeurs possibles), et que chacun de ces polynômes n'a qu'un nombre fini de racines. Le théorème 3 s'applique donc et permet d'affirmer que A est dénombrable (parce qu'il n'est pas fini). Comme $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable alors que A l'est, il existe des réels qui ne sont pas dans A : de tels réels, qui ne sont racine d'aucun polynôme non nul à coefficient entiers, sont dits *transcendants.*