DÉRIVATION

1. **a.** Que dire de la dérivée d'une fonction paire, d'une fonction impaire, d'une fonction T-périodique ?

b. Soit f une fonction numérique bornée et dérivable sur $\mathbb{R}^+$, telle que $\lim\limits_{+\infty} f' = l$. Prouver que $l = 0$.

c. Prouver que la fonction $x \mapsto \sin x + \sin(\sqrt{2}x)$, somme de fonctions périodiques, n'est pas périodique.

2. Théorème de Rolle généralisé

Soit f une fonction numérique continue sur $[a,+\infty[$, dérivable sur $]a,+\infty[$, et possédant une limite à l'infini égale à $f(a)$. On souhaite prouver l'existence d'un élément c de $]a,+\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.

a. Quelle est la difficulté nouvelle par rapport au théorème de Rolle classique ?

Démontrer le résultat énoncé en considérant l'application :

$$g \ : \ [0,1] \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(a + \frac{x}{1-x}) \quad \text{si} \quad x \neq 1, \quad g(1) = ???$$

b. Pourquoi ce résultat est-il trivial si l'on suppose en outre que f' est continue ?

c. *Une autre preuve :* prouver que f n'est pas injective et conclure.

3. **a.** Prouver que la dérivée $n^{\text{ième}}$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ est de la forme $\dfrac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}$ où P_n est un polynôme de degré n ayant toutes ses racines réelles et distinctes.

b. Donner une valeur explicite de cette dérivée $n^{\text{ième}}$.

4. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$, vérifiant $f(0) = 0$. On considère la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ pour $x \neq 0$.

a. Que doit-on poser pour prolonger g par continuité en 0 ? On suppose cela fait dans la suite.

b. Quel(s) calcul(s) doit-on effectuer pour prouver que g est dérivable en 0 ?

Quel(s) calcul(s) doit-on effectuer pour prouver que g est de classe $\mathcal{C}^1$?

5.* Soit k un réel positif et f une fonction dérivable de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$ et vérifiant en outre $\forall x \geq 0, \quad |f'(x)| \leq k|f(x)|$. On fixe un réel positif a, et on note M un majorant de $|f|$ sur le segment $[0,a]$.

Donner une nouvelle majoration de $|f(x)|$ pour $x \in [0,a]$ puis, en réitérant ce processus, prouver que f est nulle.

6. Soit f une fonction dérivable sur $[a,+\infty[$, à valeurs dans $\mathbb{C}$, telle que f' tend vers l en $+\infty$. Il s'agit de prouver que $\dfrac{f(x)}{x}$ tend aussi vers l quand x tend vers $+\infty$.

a. On suppose $l = 0$. Prouver, après avoir fixé $\varepsilon > 0$, l'existence d'un réel A tel que $|f'(t)| \leq \varepsilon$ pour $t \geq A$. Majorer alors $|f(x) - f(A)|$ pour $x \geq A$, puis $\left|\dfrac{f(x)}{x}\right|$, et conclure soigneusement en achevant l'epsilonnage.

b. Traiter le cas général en se ramenant au cas précédent.

c. Examiner la réciproque.

d. Généraliser au cas où f arrive dans $\mathbb{R}$ et où f' tend vers $+\infty$ en $+\infty$.

7. On se donne une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, telle que les fonctions f et f'' soient bornées (on notera m_0 et m_2 leurs normes infinies respectives). Prouver que $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall h > 0,\ \left|f'(x)\right| \leq 2\dfrac{m_0}{h} + \dfrac{h}{2} m_2$, en déduire que f' est bornée sur $\mathbb{R}$, et que si m_1 désigne sa norme infinie, on a $m_1 \leq 2\sqrt{m_0 m_2}$.

8. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$, dérivable et telle que $\lim\limits_{+\infty}(f + f') = l \in \mathbb{C}$.

a. Prouver que si f a une limite finie en $+\infty$, celle-ci ne peut que valoir l.

b. On suppose $l = 0$. En considérant $g(x) = f(x)\mathrm{e}^x$, prouver que f tend vers 0 en $+\infty$ (adapter l'epsilonnage de l'exercice **6.**).

c. Que dire dans le cas général si l'on ne suppose plus $l = 0$?

9. Soit f une fonction convexe sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

a. On suppose que f présente en $a \in I$ un minimum local. Prouver que f présente en a un minimum global (on pourra supposer f dérivable si l'on n'y parvient pas autrement).

b. On suppose $I = \mathbb{R}^+$ et f majorée sur I. Prouver que f décroît.

Que peut-on dire d'une fonction convexe bornée sur $\mathbb{R}$?

10. On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x$. Prouver que f réalise un homéomorphisme d'un intervalle de la forme $[a, +\infty[$ sur un intervalle que l'on précisera. Calculer $(f^{-1})'(18)$. Donner un développement asymptotique à deux termes de f^{-1} au voisinage de $+\infty$.

11. Méthode de Newton

On envisage une fonction numérique f de classe $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ dont on sait qu'elle s'annule en un point $\alpha \in I$. On suppose que α a été suffisamment finement localisé pour que l'on soit certain qu'il est dans un segment $[a,b]$ inclus dans I sur lequel f est strictement croissante et convexe. On choisit alors comme valeur approchée de α l'abscisse γ du point d'intersection de l'axe Ox avec la tangente à la courbe représentative de f issue du point de coordonnées $(b, f(b))$.

a. Faire un dessin, prouver que $f'(b) \neq 0$ et calculer γ. Comment la méthode doit-elle être modifiée si f est croissante-concave, décroissante-convexe, décroissante-concave ?

b. Prouver que l'on a $\alpha \leq \gamma \leq b$.

c. Prouver que l'on définit bien une suite (γ_n) en posant $\gamma_0 = b$ et $\gamma_{n+1} = \gamma_n - \dfrac{f(\gamma_n)}{f'(\gamma_n)}$, et prouver que cette suite converge vers α.

d. On suppose que $\forall x \in [a,b],\ \left|f'(x)\right| \geq m_1 > 0$ et $\left|f''(x)\right| \leq M_2$. Prouver l'inégalité :

$$\left|\gamma_n - \alpha\right| \leq \frac{M_2}{2m_1}\left|\gamma_{n-1} - \alpha\right|^2.$$

e. En déduire une majoration de $\left|\gamma_n - \alpha\right|$. Qu'en pensez-vous ?

f. On fixe un réel $a > 0$. Quelle suite peut-on considérer pour donner une approximation de $\sqrt{a}$?

12. Soit F une fonction de classe $\mathcal{C}^3$ sur $[a,b]$. On désigne par M un majorant de $F^{(3)}$ (?). Prouver que pour tout x de $[a,b]$, on a $\left\|F(b) - F(a) - \dfrac{b-a}{2}\big(F'(b) + F'(a)\big)\right\| \leq M\dfrac{(b-a)^3}{12}$ (*indication :* dériver tant que c'est possible la fonction $G(x) = F(x) - F(a) - \dfrac{x-a}{2}\big(F'(x) + F'(a)\big)$).