Ce devoir est constitué de divers problèmes assez courts et de difficultés variées avec, en supplément, un sujet complet (CCP PSI 2016). Son objectif est de vous faire survoler de la manière la plus exhaustive possible les divers types de problèmes que vous risquez de rencontrer aux concours.

Je vous enverrai un corrigé des différents exercices de manière graduelle tout au long des vacances. Cherchez-les bien, que ces corrigés répondent à des questions que vous vous serez posées !

Exercice 1

Le corrigé vous sera envoyé mercredi 08 février

1. **a.** Justifier que la série géométrique $\sum x^n$ peut être dérivée terme à terme sur $]-1,1[$ et en déduire, pour $x \in]-1,1[$, la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} nx^n$.

b. Prouver que la famille $\left(\dfrac{i+j}{2^{i+j}}\right)_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable et prouver que sa somme vaut 8.

2. Soient X et Y deux variables aléatoires sur un même espace probabilisé à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que la loi conjointe du couple (X,Y) est donnée par :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2,\, P(X=i,Y=j) = P\big[(X=i)\cap(Y=j)\big] = \frac{i+j}{2^{i+j+3}}.$$

a. Vérifier que la relation ci-dessus définit bien une loi conjointe.

b. Démontrer que les variables aléatoires X et Y suivent une même loi.

c. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

3. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes sur un même espace probabilisé suivant chacune une loi de Poisson de paramètres respectifs a et b.

a. Exprimer la probabilité $P(X=Y)$ sous forme d'une somme de série.

b. Faire de même pour la probabilité $P(|X-Y|=k)$ où k est un entier positif donné.

Exercice 2

Le corrigé vous sera envoyé dimanche 12 février

Un mobile se déplace sur les points à coordonnées entières d'un axe d'origine O. Au départ, le mobile est à l'origine (point d'abscisse 0) ; il se déplace selon la règle suivante : s'il est sur le point d'abscisse k à l'instant n, alors à l'instant $(n+1)$ il sera sur le point d'abscisse $(k+1)$ avec la probabilité $\dfrac{k+1}{k+2}$ et sur le point d'abscisse 0 avec la probabilité $\dfrac{1}{k+2}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note X_n l'abscisse du mobile à l'instant n. On a donc $X_0 = 0$. On *admet* que l'on définit ainsi pour tout n une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},P)$ convenable, et l'on pose $u_n = P(X_n = 0)$.

L'espérance d'une variable aléatoire X, quand elle existe, est notée $\mathrm{E}(X)$.

4. **a.** Donner la loi de X_1.

b. Prouver par récurrence que pour tout entier n, $X_n(\Omega) = [[0, n]]$.

5. **a.** Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, k \in [[1, n]]$, $P(X_n = k) = \dfrac{k}{k+1} P(X_{n-1} = k-1)$.

b. En déduire que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\forall\, k \in [[0, n]]$, $P(X_n = k) = \dfrac{1}{k+1} u_{n-k}$.

c. Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} \frac{u_j}{n-j+1} = 1$.

d. Retrouver ainsi les valeurs de u_0 et de u_1, puis déterminer u_2 et u_3.

6. **a.** Montrer, en remarquant que la relation de la question **5.a.** peut s'écrire :

$$(k+1)P(X_n = k) = k\, P(X_{n-1} = k-1),$$

que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{E}(X_n) - \mathrm{E}(X_{n-1}) = u_n$.

b. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, une expression de $\mathrm{E}(X_n)$ sous forme d'une somme mettant en jeu certains u_k.

c. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} \frac{u_j}{n-j}$ et en déduire que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} \frac{u_j}{(n-j)(n-j+1)}$.

d. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n \geq \dfrac{1}{n+1}$. Déterminer alors $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \mathrm{E}(X_n)$.

7. On note T l'instant auquel le mobile se retrouve pour la première fois à l'origine (sans compter son positionnement au départ), avec la convention que $T = 0$ si le mobile ne revient jamais en O. On admet que T est une variable aléatoire définie, elle aussi, sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

a. Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, exprimer l'évènement $(T = k)$ en fonctions d'évènements mettant en jeu certains des X_i.

b. Montrer que pour tout k de $\mathbb{N}^*$, $P(T = k) = \dfrac{1}{k(k+1)}$.

c. Calculer $P(T = 0)$. Interprétation ?

d. T possède-t-elle une variance ?

Exercice 3

Le corrigé vous sera envoyé mercredi 15 février

On effectue une succession infinie de lancers indépendants d'une pièce donnant Pile avec la probabilité $p \in]0,1[$ et Face avec une probabilité $q = 1 - p$.

On s'intéresse dans cet exercice aux successions de lancers amenant un même côté.

On dit que la première série est de longueur $n \geq 1$ si les n premiers lancers ont amené le même côté de la pièce et le $(n+1)$-ième l'autre côté.

De la même façon, la deuxième série commence au lancer suivant la fin de la première série et se termine (si elle se termine) au lancer précédant un changement de côté. On définit de même les séries suivantes.

Ω désigne l'ensemble des suites infinies de Pile ou Face.

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, P_k désigne l'évènement « le k-ième lancer amène Pile » et F_k l'évènement contraire.

1. Étude des longueurs des séries.

a. On note L_1 la longueur de la première série. En exprimant l'évènement $(L_1 = n)$ à l'aide des évènements P_k et F_k pour $k \in [[1, n+1]]$, prouver que :

$$P(L_1 = n) = p^n q + q^n p \, .$$

b. On note L_2 la longueur de la seconde série.

Calculer, pour $n, k \in \mathbb{N}^*$ la probabilité de l'évènement $(L_1 = n) \cap (L_2 = k)$.

En déduire que :

$$P(L_2 = k) = p^{k-1} q^2 + q^{k-1} p^2 \, .$$

c. Prouver que la variable aléatoire L_2 possède une espérance, et la calculer.

d. Montrer que la variable aléatoire L_2 possède une variance, et la calculer (on pourra au préalable prouver que la variable aléatoire $L_2(L_2 - 1)$ possède une espérance).

2. Étude du nombre de séries lors des *n* premiers lancers

On considère dans cette question que la pièce est équilibrée, autrement dit que $p = q = 1/2$.

On notera N_n le nombre de séries apparues lors des n premiers lancers, et l'on admettra que N_n est bien une variable aléatoire.

Par exemple, si les lancers successifs amènent *FFPPPPFFPPP*..., alors on a pour un tel évènement ω :

$$N_1(\omega) = N_2(\omega) = 1 \, , \; N_3(\omega) = N_4(\omega) = N_5(\omega) = N_6(\omega) = 2 \, , \; N_7(\omega) = N_8(\omega) = 3 \, , \; N_9(\omega) = N_{10}(\omega) = N_{11}(\omega) = 4 \, .$$

On posera, pour $s \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $G_n(s) = \sum_{k=1}^{n} P(N_n = k) s^k$.

a. Déterminer les lois de N_1 et de N_2 et calculer leurs espérances.

b. Dans le cas général où $n \geq 1$, déterminer l'ensemble des valeurs prises par N_n, puis déterminer les probabilités $P(N_n = 1)$ et $P(N_n = n)$.

c. Pour $s \in [0,1]$, comparer l'espérance de la variable aléatoire s^{N_n} avec $G_n(s)$. Que vaut $G_n'(1)$?

d. Montrer que pour tout $n \geq 2$ et tout $k \in [[1, n]]$, on a :

$$P\big((N_n = k) \cap P_n\big) = \frac{1}{2} P\big((N_{n-1} = k) \cap P_{n-1}\big) + \frac{1}{2} P\big((N_{n-1} = k-1) \cap F_{n-1}\big) \, .$$

Donner de même la probabilité $P\big((N_n = k) \cap F_n\big)$.

e. Prouver que $P\big((N_n = k)\big) = \frac{1}{2} P\big((N_{n-1} = k)\big) + \frac{1}{2} P\big((N_{n-1} = k-1)\big)$.

f. Prouver que pour $n \geq 2$ et $s \in [0,1]$, on a $G_n(s) = \frac{1+s}{2} G_{n-1}(s)$, et en déduire la valeur de $G_n(s)$.

g. Déterminer le nombre moyen de séries lors des n premiers lancers.

Exercice 4

Le corrigé vous sera envoyé dimanche 19 février

Si X est une variable aléatoire réelle discrète admettant une espérance, on note $\mathrm{E}(X)$ cette espérance.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, et X une variable aléatoire discrète sur cet espace à valeurs dans $[-1,1]$. On considère une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, *mutuellement indépendantes* et toutes de même loi que X.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$S_n = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}.$$

On se propose de prouver que si X est centrée, c'est-à-dire si $\mathrm{E}(X) = 0$, alors la suite (S_n) converge presque sûrement vers 0 (c'est un cas particulier de la loi forte des grands nombres, dans le cas de variables aléatoires bornées).

1. Montrer que X possède une espérance.

On suppose désormais que X est centrée.

2. Prouver que pour tout $\alpha > 0$:

$$P(|X| \geq \alpha) \leq \frac{\mathrm{E}(|X|)}{\alpha}.$$

3. Montrer que $\forall \varepsilon, t > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$P(S_n \geq \varepsilon) = P(\mathrm{e}^{tnS_n} \geq \mathrm{e}^{tn\varepsilon}) \leq \frac{(\mathrm{E}(\mathrm{e}^{tX}))^n}{\mathrm{e}^{tn\varepsilon}}.$$

4. Soit $a > 1$. On considère la fonction g_a définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g_a(x) = \frac{1-x}{2} a^{-1} + \frac{1+x}{2} a - a^x.$$

a. Prouver que la fonction $g_a{}'$ est décroissante et en déduire que g_a est positive sur $[-1,1]$.

b. Prouver que pour tout $t > 0$ et pour tout $x \in [-1,1]$, on a :

$$\mathrm{e}^{tx} \leq \frac{1-x}{2}\mathrm{e}^{-t} + \frac{1+x}{2}\mathrm{e}^{t}.$$

c. En déduire que pour tout $t > 0$, $\mathrm{E}(\mathrm{e}^{tX}) \leq \operatorname{ch} t$.

d. Montrer que pour tout entier k et tout réel t, on a :

$$\frac{t^{2k}}{(2k)!} \leq \frac{1}{k!}\left(\frac{t^2}{2}\right)^k.$$

e. En déduire que pout tout $t > 0$, on a :

$$\mathrm{E}(\mathrm{e}^{tX}) \leq \frac{\mathrm{e}^{t^2}}{2}.$$

5. Dans cette question, n désigne un élément de $\mathbb{N}^*$ et ε un réel strictement positif.

a. Déterminer le minimum sur $\mathbb{R}$ de la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-nt\varepsilon + n\frac{t^2}{2}}$.

b. En déduire que :

$$P(|S_n| \geq \varepsilon) \leq 2\mathrm{e}^{-n\frac{\varepsilon^2}{2}}.$$

6. **a.** Prouver, pour tout $\varepsilon > 0$, la convergence de la série de terme général $P(|S_n| \geq \varepsilon)$.

b. On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\varepsilon > 0$:

$$B_n(\varepsilon) = \bigcup_{m \geq n} \left\{\omega \in \Omega / |S_m(\omega)| > \varepsilon\right\}.$$

Justifier que les $B_n(\varepsilon)$ sont des évènements, et que :

$$P(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} B_n(\varepsilon)) = 0\,.$$

c. On pose, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\Omega_k = \left\{\omega \in \Omega \;/\; \exists\, n \in \mathbb{N}^*,\, \forall\, m \geq n,\, |S_m(\omega| \leq \frac{1}{k}\right\}.$$

Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, Ω_k est un évènement.

d. Écrire l'ensemble $A = \left\{\omega \in \Omega \;/\; \lim\limits_{n\to+\infty} S_n(\omega) = 0\right\}$ à l'aide des évènements Ω_k et en déduire que A est un évènement.

e. Prouver que :

$$P(A) = 1\,.$$

CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE PSI

MATHEMATIQUES

Mardi 3 mai : 14 h - 18 h

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont autorisées

Notations et définitions

- $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels et $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.
- Si n, m sont deux entiers naturels non nuls, on désigne par $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ [respectivement $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$] l'espace vectoriel des matrices à n lignes et m colonnes à coefficients dans $\mathbb{R}$ [respectivement dans $\mathbb{C}$]. Comme $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ est contenu dans $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$, une matrice à coefficients réels est aussi à coefficients complexes.
- Si $n = m$, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ [respectivement $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$] pour $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ [respectivement $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$].
- I_n désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ [respectivement $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$].
- Si $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on dit que cette suite converge vers une matrice $L \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si, pour tout couple $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, la suite $(M_n(i,j))_{n\in\mathbb{N}}$ des coefficients d'indice (i,j) de M_n converge vers le coefficient, noté $L(i,j)$, d'indice (i,j) de L.
- Un vecteur $(x_1, \cdots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ [respectivement de $\mathbb{C}^n$] est identifié à l'élément $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ [respectivement $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$].
- Pour tout vecteur $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{C}^n$, on note $\|x\|_\infty = \max\{|x_i| \ ; \ 1 \leq i \leq n\}$.
- Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on désigne par $\mathrm{Sp}(A)$ l'ensemble de toutes les valeurs propres complexes de A et on note :

$$\rho(A) = \max_{\lambda\in\mathrm{Sp}(A)} |\lambda| .$$

  On rappelle que $\rho(A)$ est le rayon spectral de A.
- Si X est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telle que $X(\Omega) = \{x_1, \cdots, x_n\} \subset \mathbb{R}$, on identifie la loi P_X de X au vecteur colonne $\begin{pmatrix} \mathbb{P}(X = x_1) \\ \vdots \\ \mathbb{P}(X = x_n) \end{pmatrix}$.

Objectifs

L'objet de ce problème est d'étudier la suite des puissances d'une matrice stochastique. La première partie est consacrée à cette étude dans le cas où $n = 2$. Dans la seconde partie, on étudie le spectre des matrices stochastiques. Dans la troisième partie, on étudie l'existence d'une probabilité invariante par une matrice stochastique et la dernière partie est consacrée à l'étude des puissances d'une telle matrice.

Partie I

Cas $n = 2$

On suppose dans cette partie que $n = 2$ et, pour $\alpha \in [0, 1]$ et $\beta \in [0, 1]$ avec $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$, on note :

$$A(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}.$$

Il pourra être utile de noter $\lambda = 1 - (\alpha + \beta)$.

I.1 Puissances de $A(\alpha, \beta)$

Q1. Montrer que 1 est valeur propre de $A(\alpha, \beta)$ et déterminer le sous-espace propre associé.

Q2. Montrer que $A(\alpha, \beta)$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et la diagonaliser.

Q3. Calculer, pour tout entier $p \in \mathbb{N}$, la matrice $A(\alpha, \beta)^p$.

Q4. Montrer que, pour $(\alpha, \beta) \neq (1, 1)$, la suite $(A(\alpha, \beta)^p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice $L(\alpha, \beta)$ que l'on précisera. Que se passe-t-il pour $(\alpha, \beta) = (1, 1)$?

I.2 Application

Soient α et β deux réels de $]0, 1[$. Un message binaire de longueur ℓ, c'est-à-dire une suite finie $(a_1, a_2, \cdots, a_\ell)$ où pour tout $i \in \{1, \cdots, \ell\}$, $a_i \in \{0, 1\}$, est transmis dans un réseau formé de relais. On suppose que, à chaque relais, un élément $x \in \{0, 1\}$ est transmis avec une probabilité d'erreur égale à α pour un passage de 0 à 1 et β pour un passage de 1 à 0. On note X_0 la variable aléatoire définissant le message initial de longueur ℓ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, au n-ième relais, le résultat du transfert est noté X_n. On suppose que les relais sont indépendants les uns des autres et que les erreurs sur les bits constituant le message sont indépendantes.

Q5. Cas $\ell = 1$

Montrer que pour tout entier $n \geq 0$:

$$\begin{pmatrix} P(X_{n+1} = 0) \\ P(X_{n+1} = 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \beta \\ \alpha & 1-\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(X_n = 0) \\ P(X_n = 1) \end{pmatrix}.$$

Calculer, pour $n > 0$, $\mathbb{P}(X_n = 0 | X_0 = 0)$ et $\mathbb{P}(X_n = 1 | X_0 = 1)$.

Si $r = \min\left(\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}, \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\right)$, montrer que la probabilité pour que X_n soit conforme à X_0 est supérieure ou égale à :

$$r + (1 - r)(1 - \alpha - \beta)^n.$$

Q6. Cas $\ell > 1$

On pose $X_n = \left(X_n^1, \cdots, X_n^\ell\right)$ où, pour $k \in \{1, \cdots, \ell\}$, X_n^k est le résultat de la transmission du k-ième bit au n-ième relais. Soit Q_n la probabilité pour que le message X_n soit conforme au message initial. Montrer que Q_n vérifie :

$$Q_n \geq \left(r + (1-r)\,(1-\alpha-\beta)^n\right)^\ell .$$

Q7. On suppose dans cette question que $\alpha = \beta$. Que peut-on dire dans ce cas de l'inégalité précédente ?

Pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$, déterminer un entier n_c tel que la probabilité d'obtenir un message erroné au n-ième relais soit supérieure ou égale à ε (on dit que n_c est la *taille critique* du réseau).

Partie II
Spectre des matrices stochastiques

Dans cette partie, les matrices considérées sont carrées et d'ordre $n \geq 2$. On dit qu'une matrice $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est stochastique [respectivement strictement stochastique] si et seulement si elle est à coefficients positifs [respectivement strictement positifs] et :

$$\forall i \in \{1, \cdots, n\}\,,\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1.$$

II.1 Coefficients

Q8. Soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice stochastique [respectivement strictement stochastique]. Montrer que pour tous i, j compris entre 1 et n on a :

$$0 \leq a_{ij} \leq 1 \text{ [respectivement } 0 < a_{ij} < 1\text{].}$$

Q9. Montrer qu'une matrice A à coefficients réels positifs est stochastique si et seulement si 1 est valeur propre de A et le vecteur e de coordonnées $(1, \cdots, 1)$ est un vecteur propre associé.

Q10. Montrer que le produit de deux matrices stochastiques [respectivement strictement stochastiques] est une matrice stochastique [respectivement strictement stochastique].

II.2 Valeurs propres

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice stochastique.

Q11. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{C}^n,\ \forall p \in \mathbb{N},\ \|A^p x\|_\infty \leq \|x\|_\infty .$$

Q12. Montrer que $\rho(A) = 1$.

II.3 Diagonale strictement dominante

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dite à diagonale strictement dominante si et seulement si

$$\forall i \in \{1, \cdots, n\}, \ |a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| .$$

Q13. Soit A une matrice quelconque dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A. Montrer qu'il existe un indice $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ tel que :

$$|\lambda - a_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| .$$

Q14. Montrer qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à diagonale strictement dominante est inversible.

II.4 Valeur propre de module maximal

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice strictement stochastique.

Q15. On désigne par $A_1 = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ la matrice extraite de A en supprimant sa dernière ligne et sa dernière colonne. Montrer que la matrice $A_1 - I_{n-1}$ est à diagonale strictement dominante. Que peut-on en déduire quant au rang de $A - I$?

Q16. Montrer que $\ker(A - I_n)$ est de dimension 1.

Q17. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \setminus \{1\}$. Montrer que $|\lambda| < 1$.

Partie III

Probabilité invariante

On considère quatre points dans le plan numérotés de 1 à 4. Une particule se déplace chaque seconde sur l'ensemble de ces points de la façon suivante : si elle se trouve au point i, elle reste au point i avec une probabilité égale à $\frac{1}{10}$ ou passe en un point $j \neq i$ de façon équiprobable.

III.1 Une suite de variables aléatoires

On note X_0 une variable aléatoire de loi P_0 donnant la position du point en l'instant $n = 0$, X_n la position du point à l'instant n et $P_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 1) \\ \vdots \\ \mathbb{P}(X_n = 4) \end{pmatrix}$ la loi de X_n.

Q18. Montrer qu'il existe une matrice Q, que l'on déterminera, telle que :

$$P_1 = QP_0.$$

Calculer P_n en fonction de Q et de P_0.

Q19. Montrer qu'il existe un unique vecteur $\Pi = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix}$, que l'on déterminera, tel que :

$$\forall i \in \{1, \cdots, 4\},\ p_i \geq 0 \quad \sum_{i=1}^{4} p_i = 1 \quad \text{et} \quad \Pi = Q\Pi.$$

III.2 Rapidité de convergence

Q20. Montrer sans calcul que Q est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Q21. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de Q.

Q22. En déduire que $(Q^p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice R que l'on précisera en fonction de Π et qu'il existe $r \in]0, 1[$ tel que :

$$\|Q^p - R\| = O\left(r^p\right).$$

En déduire que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite indépendante de la loi de X_0 et interpréter le résultat obtenu.

Partie IV

Puissances d'une matrice stochastique

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice strictement stochastique. On note :

$$m = \min_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}.$$

Pour tout entier naturel non nul p, on note $a_{i,j}^{(p)}$ le coefficient d'indice (i, j) de A^p :

$$A^p = \left(a_{i,j}^{(p)}\right)_{1\leq i,j\leq n}.$$

Enfin, pour tout entier j compris entre 1 et n, on note :

$$m_j^{(p)} = \min_{1\leq k\leq n} a_{k,j}^{(p)},\ M_j^{(p)} = \max_{1\leq k\leq n} a_{k,j}^{(p)}.$$

Q23. Encadrement

Montrer que, pour tout entier naturel non nul p et tout entier j compris entre 1 et n, on a :

$$0 < m_j^{(p)} \leq m_j^{(p+1)} \leq M_j^{(p+1)} \leq M_j^{(p)}.$$

Q24. Minoration

Montrer que, pour tout entier naturel non nul p et tout entier j compris entre 1 et n, on a :

$$m_j^{(p+1)} - m_j^{(p)} \geq m\left(M_j^{(p)} - m_j^{(p)}\right) \quad \text{et} \quad M_j^{(p)} - M_j^{(p+1)} \geq m\left(M_j^{(p)} - m_j^{(p)}\right).$$

Q25. Majoration

Montrer que, pour tout entier naturel non nul p et tout entier j compris entre 1 et n, on a :

$$M_j^{(p+1)} - m_j^{(p+1)} \leq (1-2m)\left(M_j^{(p)} - m_j^{(p)}\right).$$

Q26. Convergence de ces suites

En déduire que, pour tout entier j compris entre 1 et n, les suites $\left(m_j^{(p)}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ et $\left(M_j^{(p)}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

Q27. Conclusion

En déduire que la suite $(A^p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice L stochastique dont toutes les lignes sont identiques.

FIN

IMPRIMERIE NATIONALE – 16 1223 – D'après documents fournis