4b) Pour $n \geq 1$, notons E_n l'évènement « le pion reste sur les cases B et C entre entre les instants 1 et n sans repasser par la case A, et est en B à l'instant n » et F_n l'évènement « le pion reste sur les cases B et C entre entre les instants 1 et n sans repasser par la case A, et est en C à l'instant n ». Notons $a_n = P(E_n)$ et $b_n = P(F_n)$.

Alors pour $n \geq 1$, $E_{n+1} = E_{n+1} \cap (E_n \cup F_n)$ car à l'instant n, le pion était soit en B, soit en C. Donc $E_{n+1} = (E_{n+1} \cap E_n) \cup (E_{n+1} \cap F_n)$, et comme les évènements sont incompatibles,

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= P(E_{n+1}) = P\left(E_{n+1} \cap E_n\right) + P\left(E_{n+1} \cap F_n\right) = P_{E_n}(E_{n+1})P(E_n) + P_{F_n}(E_{n+1})P(F_n) \\ &= P_{E_n}(E_{n+1})p_n + P_{F_n}(E_{n+1})q_n = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{3}b_n \end{aligned}$$

De même, $b_{n+1} = \dfrac{1}{3}a_n + \dfrac{1}{3}b_n$, en particulier, on trouve que $a_n = b_n$ pour tout $n \geq 2$.

Or, $a_1 = P(B_1) = \dfrac{1}{4}$ et $b_1 = P(C_1) = \dfrac{1}{4}$, donc on a encore $a_n = b_n$ pour tout $n \geq 1$.

Donc $a_{n+1} = \dfrac{2}{3}a_n$ pour tout $n \geq 1$, donc $(a_n)_{n\geq 1}$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{3}$, $a_1 = \dfrac{1}{4}$, donc $b_n = a_n = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$. La probabilité cherchée est celle de $E_n \cup F_n$, ces deux évènements sont disjoints, donc la probabilité cherchée est (pour $n \geq 1$) : $\boxed{\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}}$.

5) On cherche $P_{D_2}(A_1)$. Alors par la formule Bayes, $P_{D_2}(A_1) = \dfrac{P_{A_1}(D_2)P(A_1)}{P(D_2)} = \dfrac{\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}}{\frac{5}{16}} = \boxed{\dfrac{1}{5}}$.

6) $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \dfrac{3}{4}\left(\dfrac{11}{12}\right)^{n-1}\right) = 1$ car $\left|\dfrac{11}{12}\right| < 1$.

Or, $s_n = P(D_n)$, et l'une des règles est que, si le pion est en D à un instant, l'instant suivant aussi, donc $D_n \subset D_{n+1}$ pour tout entier $n \geq 0$. Donc la suite $(D_n)_{n\geq 0}$ est croissante pour l'inclusion, et donc $1 = \lim\limits_{n\to+\infty} s_n = P\left(\bigcup\limits_{n\geq 0} D_n\right)$.

Autrement dit, avec probabilité 1, le pion se retrouve en D à un instant fini.

Problème **I-1)** $[L_1 = n] = \big(F_1 \cap \cdots \cap F_n \cap P_{n+1}\big) \cup \big(P_1 \cap \cdots \cap P_n \cap F_{n+1}\big)$, est l'union de deux évènements disjoints (car $F_1 \cap \cdots \cap F_n \cap P_{n+1} \subset F_1$, $P_1 \cap \cdots \cap P_n \cap F_{n+1} \subset P_1$ et $F_1 \cap P_1 = \emptyset$, par exemple). Donc, par additivité de la probabilité, $P(L_1 = n) = P\big(F_1 \cap \cdots \cap F_n \cap P_{n+1}\big) + P\big(P_1 \cap \cdots \cap P_n \cap F_{n+1}\big)$.

Puis, comme les lancers de pièce sont indépendants les uns des autres (par hypothèse), les évènements $(F_1, \ldots, F_n, P_{n+1})$ sont mutuellement indépendants (car chacun est attaché à un seul lancer, différent de celui des autres évènements). Donc par indépendance, $P\big(F_1 \cap \cdots \cap F_n \cap P_{n+1}\big) = P(F_1) \times \cdots \times P(F_n) \times P(P_{n+1}) = q^n p$.

De même, $P\big(P_1 \cap \cdots \cap P_n \cap F_{n+1}\big) = p^n q$. Donc on a bien $P(L_1 = n) = p^n q + q^n p$.

Enfin, $\sum\limits_{n\geq 1} p^n$ et $\sum\limits_{n\geq 1} q^n$ sont des séries géométriques de raison p et q respectivement, donc convergentes car p et q appartiennent à $[0,1[$. Donc, par combinaison linéaire,

$\sum\limits_{n\geq 1} P(L_1 = n)$ converge et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} P(L_1 = n) = q\sum\limits_{n=1}^{+\infty} p^n + p\sum\limits_{n=1}^{+\infty} q^n = q\dfrac{p}{1-p} + p\dfrac{q}{1-q} = p + q = 1$ (en utilisant $p + q = 1$).

2a) $[L_1 = n] \cap [L_2 = k] = \big(F_1 \cap \cdots \cap F_n \cap P_{n+1} \cap \cdots \cap P_{n+k} \cap F_{n+k+1}\big) \cup \big(P_1 \cap \cdots \cap P_n \cap F_{n+1} \cap \cdots \cap F_{n+k} \cap P_{n+k+1}\big)$, donc de même qu'à la première question,

$$\begin{aligned} P\big([L_1 = n] \cap [L_2 = k]\big) &= \prod_{i=1}^{n} P(F_i) \times \prod_{i=1}^{k} P(P_{n+i}) \times P(F_{n+k+1}) + \prod_{i=1}^{n} P(P_i) \times \prod_{i=1}^{k} P(F_{n+i}) \times P(P_{n+k+1}) \\ &= q^n p^k q + pp^n q^k p = q^{n+1}p^k + p^{n+1}q^k = q^2p^k \times q^{n-1} + p^2q^k \times p^{n-1} \end{aligned}$$

2b) Comme L_1 est évidemment à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ (et on a même $L_1(\Omega) = \mathbb{N}^*$ grâce à la vérification $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} P(L_1 = n) = 1$) et que L_1 est une variable aléatoire, on a $\big([L_1 = n]\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui est un système complet d'évènements, donc la formule des probabilités totales donne :

$$P(L_2 = k) = \sum_{n=1}^{+\infty} P\big([L_1 = n] \cap [L_2 = k]\big) = q^2p^k \sum_{n=1}^{+\infty} q^{n-1} + p^2q^k \sum_{n=1}^{+\infty} p^{n-1} = q^2p^k \frac{1}{1-q} + p^2q^k \frac{1}{1-p} = q^2p^{k-1} + p^2q^{k-1}$$

2c) Comme L_2 est évidemment à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, le fait d'admettre que $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} P(L_2 = k) = 1$ revient à admettre que $L_2(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Il faut donc montrer que la série $\sum\limits_{k\geq 1} kP(L_2 = k)$ converge absolument, et comme elle est à termes positifs, tout revient à montrer qu'elle converge.

Or, $\sum_{k\geq1} kq^2p^{k-1} = q^2\sum_{k\geq1} kp^{k-1}$ converge, car on reconnaît une série géométrique dérivée de raison p (et que $p \in [0,1[$), et donc $\sum_{k=1}^{+\infty} kq^2p^{k-1} = q^2\dfrac{1}{(1-p)^2} = 1$. De même, $\sum_{k\geq1} kp^2q^{k-1}$ converge et $\sum_{k=1}^{+\infty} kp^2q^{k-1} = 1$. Donc, par combinaison linéaire, $\sum_{k\geq1} kP(L_2 = k)$ converge (donc L_2 a une espérance), et $\mathbb{E}(L_2) = \sum_{k=1}^{+\infty} kP(L_2 = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} kq^2p^{k-1} + \sum_{k=1}^{+\infty} kp^2q^{k-1} = 1 + 1 = \boxed{2}$.

2d) $L_2(L_2 - 1)$ a une espérance si et seulement si la série $\sum_{k\geq1} k(k-1)P(L_2 = k)$ converge (absolument, mais comme elle est à termes positifs, converge suffit), et alors l'espérance vaut la somme de la série (théorème de transfert).

Or, $\sum_{k\geq1} k(k-1)P(L_2 = k) = p^2q\sum_{k\geq2} k(k-1)q^{k-2} + q^2p\sum_{k\geq2} k(k-1)p^{k-2}$ (le terme $k = 1$ est nul) est la somme de deux séries géométriques dérivées deux fois, de raison $q \in [0,1[$ et $p \in [0,1[$, donc convergent (car la série entière géométrique a 1 pour rayon de convergence).

Comme $\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)x^{k-2} = \left(\dfrac{1}{1-x}\right)'' = \dfrac{2}{(1-x)^3}$ pour $x \in]-1,1[$, on a $\mathbb{E}\big(L_2(L_2-1)\big) = p^2q\dfrac{2}{(1-q)^3} + q^2p\dfrac{2}{(1-p)^3} = \dfrac{2q}{p} + \dfrac{2p}{q}$ (car $1 - p = q$ et $1 - q = p$).

Puis, par addition de deux variables aléatoires qui ont une espérance, $L_2^2 = L_2(L_2 - 1) + L_2$ a une espérance, donc L_2 a une variance, et (formule de Huygens) $\mathbb{V}(L_2) = \mathbb{E}\big(L_2(L_2-1)\big) + \mathbb{E}(L_2) - \mathbb{E}(L_2)^2 = \dfrac{2q}{p} + \dfrac{2p}{q} + 2 - 4 = \boxed{\dfrac{2q^2 + 2p^2 - 2qp}{pq}}$.

II-1) $\boxed{N_1 = 1}$, c'est une variable constante. Donc $\boxed{\mathbb{E}(N_1) = 1}$.

Si $n = 2$, on fait deux lancers, donc $\Omega = \{P_1 \cap P_2, F_1 \cap F_2, P_1 \cap F_2, F_1 \cap P_2\}$. Or, $N_2(P_1 \cap P_2) = N_2(F_1 \cap F_2) = 1$ et $N_2(P_1 \cap F_2) = N_2(F_1 \cap P_2) = 2$. D'où $N_2(\Omega) = \{1, 2\}$, $P(N_2 = 2) = P(P_1 \cap F_2) + (F_1 \cap P_2) = P(P_1) \times P(F_2) + P(F_1) \times P(P_2) = \dfrac{1}{2}$ et $P(N_2 = 1) = P(P_1 \cap P_2) + (F_1 \cap F_2) = P(P_1) \times P(P_2) + P(F_1) \times P(F_2) = \dfrac{1}{2}$. Donc $\mathbb{E}(N_2) = 1 \times \dfrac{1}{2} + 2\dfrac{1}{2} = \boxed{\dfrac{3}{2}}$.

2) N_n renvoie un nombre de séries, donc est un entier, non nul car on a toujours au moins une série (le premier lancer commence une première série !), et au plus n car on fait n lancers (on ne peut pas avoir plus de séries que de lancers). Donc $N_n(\Omega) \subset [\![1, n]\!]$.

Réciproquement, si $1 \leq k \leq n$ et ω réalise $F_1 \cap \cdots \cap F_{n-k+1} \cap P_{n-k+2} \cap F_{n-k+3} \cap P_{n-k+3} \cap \ldots$ (on alterne à chaque lancer, à partir du langer numéro $n - k + 1$), alors $N_n(\omega) = k$, donc $k \in N_n(\Omega)$. Donc $N_n(\Omega) = [\![1, n]\!]$.

$[N_n = 1] = \big(F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_n\big) \cup \big(P_1 \cap P_2 \cap \cdots \cap P_n\big)$ et $[N_n = n] = \big(F_1 \cap P_2 \cap P_3 \cap F_4 \cap \ldots\big) \cup \big(P_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap F_4 \cap \ldots\big)$, donc $\boxed{P(N_n = 1) = \dfrac{1}{2^{n-1}}}$ et $\boxed{P(N_n = n) = \dfrac{1}{2^{n-1}}}$.

3)
```
X[0] = piece()
N[0] = 1
for i in range(1, m) :
    X[i] = piece()
    if X[i] == X[i - 1] : N[i] = N[i - 1]
    else : N[i] = N[i - 1] + 1
return N
```

4a) Comme N_n est à valeurs finies, si on applique le théorème de transfert, on sait que s^{N_n} a une espérance, et de plus $\mathbb{E}(s^{N_n}) = \sum_{k=1}^{n} s^kP(N_n = k) = G_n(s)$.

4b) Comme G_n est un polynôme en s, on peut le dériver.

D'où $G'(s) = \sum_{k=1}^{n} kP(N_n = k)s^{k-1}$, donc $G'(1) = \sum_{k=1}^{n} kP(N_n = k)$, et c'est $\mathbb{E}(N_n)$ car N_n est à valeurs dans $[\![1, n]\!]$.

4c) Utilisons la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènement (P_{n-1}, F_{n-1}) :

$$P\big([N_n = k] \cap P_n\big) = P\big([N_n = k] \cap P_n \cap P_{n-1}\big) + P\big([N_n = k] \cap P_n \cap F_{n-1}\big).$$

Or, si on a $P_{n-1} \cap P_n$, alors on a $N_n = N_{n-1}$, car au lancer numéro n, on a continué la série qui était en cours au moment du $(n-1)$-ième lancer. Donc $[N_n = k] \cap P_n \cap P_{n-1} = [N_{n-1} = k] \cap P_n \cap P_{n-1}$. Puis, $[N_{n-1} = k] \cap P_{n-1}$ ne concerne que les $n - 1$ premiers tirages, et P_n celui du n-ième tirage, donc ils sont indépendants (car les tirages sont indépendants par hypothèse), donc $P\big([N_n = k] \cap P_n \cap P_{n-1}\big) = P\big([N_{n-1} = k] \cap P_{n-1}\big)P(P_n) = P\big([N_{n-1} = k] \cap P_{n-1}\big)\dfrac{1}{2}$.

Enfin, si on a $F_{n-1} \cap P_n$, alors on a $N_n = N_{n-1} + 1$, car au lancer numéro n, on a commencé une série différente de celle qui était en cours au moment du $(n-1)$-ième lancer. Donc $[N_n = k] \cap P_n \cap F_{n-1} = [N_{n-1} = k - 1] \cap P_n \cap F_{n-1}$. Puis, $[N_{n-1} = k - 1] \cap F_{n-1}$ ne concerne que les $n - 1$ premiers tirages, et P_n celui du n-ième tirage, donc ils sont indépendants (car les tirages sont indépendants par hypothèse), donc $P\big([N_n = k] \cap P_n \cap F_{n-1}\big) = P\big([N_{n-1} = k - 1] \cap F_{n-1}\big)P(P_n) =$

$P\big([N_{n-1}=k-1]\cap F_{n-1}\big)\dfrac{1}{2}$. En regroupant, on a bien la formule :

$$P\big([N_n=k]\cap P_n\big)=P\big([N_{n-1}=k]\cap P_{n-1}\big)\frac{1}{2}+P\big([N_{n-1}=k-1]\cap F_{n-1}\big)\frac{1}{2}.$$

Pour terminer, on applique la formule des probabilitées totales avec le système complet d'évènement (P_n,F_n), qui donne $P(N_n=k)=P\big([N_n=k]\cap P_n\big)+P\big([N_n=k]\cap F_n\big)$. Les formules précédentes (dont celle admise par l'énoncé) donnent :

$$\begin{aligned}P(N_n=k)&=P\big([N_{n-1}=k]\cap P_{n-1}\big)\frac{1}{2}+P\big([N_{n-1}=k-1]\cap F_{n-1}\big)\frac{1}{2}+P\big([N_{n-1}=k]\cap F_{n-1}\big)\frac{1}{2}+P\big([N_{n-1}=k-1]\cap P_{n-1}\big)\frac{1}{2}\\&=\frac{1}{2}\Big[P\big([N_{n-1}=k]\cap P_{n-1}\big)+P\big([N_{n-1}=k]\cap F_{n-1}\big)\Big]+\frac{1}{2}\Big[P\big([N_{n-1}=k-1]\cap P_{n-1}\big)+P\big([N_{n-1}=k-1]\cap F_{n-1}\big)\Big]\end{aligned}$$

Puis, la formule des probabilitées totales appliquées avec le système complet d'évènement (P_{n-1},F_{n-1}) donne les égalités $P\big([N_{n-1}=k]\cap P_{n-1}\big)+P\big([N_{n-1}=k]\cap F_{n-1}\big)=P(N_{n-1}=k)$ et $P\big([N_{n-1}=k-1]\cap P_{n-1}\big)+P\big([N_{n-1}=k-1]\cap F_{n-1}\big)=P(N_{n-1}=k-1)$.

Donc en regroupant, on a bien $P(N_n=k)=\dfrac{1}{2}P(N_{n-1}=k)+\dfrac{1}{2}P(N_{n-1}=k-1)$.

4d) En utilisant la formule précédent :

$$\begin{aligned}G_n(s)&=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}P(N_{n-1}=k)+\frac{1}{2}P(N_{n-1}=k-1)\right)s^k=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}P(N_{n-1}=k)s^k+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}P(N_{n-1}=k-1)s^k\\&\underset{p=k-1}{=}\frac{1}{2}G_{n-1}(s)+\frac{1}{2}\sum_{p=0}^{n-1}P(N_{n-1}=p)s^{p+1}=\frac{1}{2}G_{n-1}(s)+\frac{1}{2}sG_{n-1}(s)\end{aligned}$$

car si $p=0$, $P(N_{n-1}=0)s^{0+1}=0$, et si $k=n$, $P(N_{n-1}=n)s^n=0$ (car $N_{n-1}(\Omega)=[\![1,n-1]\!]$). D'où $G_n(s)=\dfrac{1+s}{2}G_{n-1}(s)$.

Donc la suite $\big(G_n(s)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison $\dfrac{1+s}{2}$ (car le réel $\dfrac{1+s}{2}$ ne dépend pas de de n). Or, $G_1(s)=\displaystyle\sum_{k=1}^{1}P(N_1=1)s^k=s$, donc on en déduit directement que $G_n(s)=s\left(\dfrac{1+s}{2}\right)^{n-1}$.

4e) $G_n'(s)=\left(\dfrac{1+s}{2}\right)^{n-1}+\dfrac{n-1}{2}s\left(\dfrac{1+s}{2}\right)^{n-2}$, donc $G_n'(1)=1+\dfrac{n-1}{2}$, donc $\mathbb{E}(N_n)=\boxed{\dfrac{n+1}{2}}$.

Problème **I1)** Au départ, le mobile est au point d'abscisse zéro. Suivant la règle, à l'étape d'après, son abscisse aura soit augmentée de 1 (et vaudra donc 1), soit retournée à 0. Donc on a bien $X_1(\Omega)=\{0,1\}$.

$\boxed{P(X_1=0)=\dfrac{1}{2}}$ et $\boxed{P(X_1=1)=\dfrac{1}{2}}$.

2) Faisons une récurrence sur n.

L'initialisation à $n=1$ a été faite à la question précédente (et pour $n=0$, c'est immédiat puisque X_0 est constant égal à 0 par hypothèse).

Pour l'hérédité : supposons que $X_n(\Omega)=\{0,\dots,n\}$. Soit $k\in\{1,\dots,n+1\}$, alors comme $k-1\in X_n(\Omega)$, il existe un déplacement qui fait qu'à l'instant n le mobile soit au point d'abscisse $k-1$. Alors, d'après la règle, à l'instant suivant, il peut se retrouver au point d'abscisse $(k-1)+1=k$ avec une probabilité non nulle (à savoir $\dfrac{k}{k+1}$) ce qui veut dire que $k\in X_{n+1}(\Omega)$, soit se retrouver au point d'abscisse 0 avec probabilité non nulle (à savoir $\dfrac{1}{k+1}$), ce qui donne donc $0\in X_{n+1}(\Omega)$.

On a donc montré que $0\in X_{n+1}(\Omega)$, et $\forall k\in\{1,\dots,n+1\}$, $k\in X_{n+1}(\Omega)$, on a donc $\{0,\dots,n+1\}\subset X_{n+1}(\Omega)$.

Pour l'inclusion réciproque : soit $\omega\in\Omega$, alors d'après la règle on a soit $X_{n+1}(\omega)=X_n(\omega)+1$, soit $X_{n+1}(\omega)=0$, donc comme $X_n(\omega)\in\{0,\dots,n\}$ d'après l'hypothèse de récurrence, on a soit $X_{n+1}(\omega)\in\{1,\dots,n+1\}$, soit $X_{n+1}(\omega)=0$, donc $X_{n+1}(\Omega)\subset\{0,\dots,n+1\}$. D'où, par double inclusion, $X_{n+1}(\Omega)=\{0,\dots,n+1\}$, d'où l'hérédité.

D'où par récurrence sur n, on a bien que $\forall n\in\mathbb{N}$, $X_n(\Omega)=\{0,\dots,n\}$.

3a) Utilisons la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements $([X_{n-1}=i])_{0\leq i\leq n-1}$ (c'est bien un système complet d'évènements car d'après la question précédente, $X_{n-1}(\Omega)=\{0,\dots,n-1\}$) :

$$\forall k\in\{1,\dots,n\},\ P(X_n=k)=\sum_{i=0}^{n-1}P_{X_{n-1}=i}(X_n=k)P(X_{n-1}=i)$$

Or, d'après la règle (et comme on l'a fait remarqué avant), soit X_n prend la valeur 0, soit un de plus que X_{n-1}. Donc comme $k\neq 0$, on a $P_{X_{n-1}=i}(X_n=k)=0$ si $i\neq k-1$ et $P_{X_{n-1}=k-1}(X_n=k)=\dfrac{k}{k+1}$. En reportant, on a la formule demandée.

3b) Montrons par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$: P_n=« $\forall k\in\{0,\dots,n\}$, $P(X_n=k)=\dfrac{1}{k+1}u_{n-k}$ ».

Pour $k=0$, l'égalité $P(X_n=0)=u_n$ est la définition de u_n, donc vraie pour tout n, en particulier pour $n=0$, ce qui donne P_0. Si $n\geq 1$: pour $k=1$, la formule de la question précédente donne $P(X_n=1)=\dfrac{1}{2}P(X_{n-1}=0)$, donc par