Pour x réel élément de $]-1,1[$, et n entier naturel non nul, on pose :

$$u_n(x) = \ln(1+x^n).$$

Étude sur $[0,1[$ de la série de fonctions $\sum u_n$

1. **a.** Prouver, pour tout réel positif u, les inégalités : $0 \leq \ln(1+u) \leq u$.

b. En déduire que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $[0,1[$, et que cette convergence est uniforme sur tout intervalle de la forme $[0,a]$ avec $0 \leq a < 1$.

On pose désormais, pour x réel élément de $[0,1[$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1+x^n)$.

2. **a.** Prouver que la fonction f ainsi définie est continue sur $[0,1[$.

b. Calculer $f(0)$, prouver que f est croissante sur $[0,1[$ et que $\forall\, x \in [0,1[,\ f(x) \leq \dfrac{x}{1-x}$.

b. Prouver que pour tout réel u élément de $[0,1[$, on a l'inégalité : $\ln(1+u) \geq \dfrac{u}{2}$.

c. En déduire une minoration de $f(x)$ par une fonction simple (ne comportant plus de signe Σ), puis la limite de f en 1^-.

3. Prouver que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1[$, et déterminer sa dérivée sur cet intervalle.

4. On fixe un réel x de l'intervalle $[0,1[$ et l'on pose, pour $t \in \mathbb{R}^+$, $g(t) = \ln(1+x^t)$. Par ailleurs, on définit une fonction h sur $]0,1]$ par $h(u) = \dfrac{\ln(1+u)}{u}$.

a. Prouver que h se prolonge en une fonction continue sur $[0,1]$.

On posera désormais $\lambda = \int_0^1 h(u)\mathrm{d}u = \int_0^1 \dfrac{\ln(1+u)}{u}\,\mathrm{d}u$.

b. Étudier la monotonie de la fonction g et en déduire, pour $N \in \mathbb{N}^*$, l'encadrement :

$$\int_1^{N+1} \ln(1+x^t)\mathrm{d}t \leq \sum_{n=1}^{N} u_n(x) \leq \int_0^N \ln(1+x^t)\mathrm{d}t.$$

c. Grâce au changement de variable $u = x^t$ dans les intégrales précédentes, en déduire l'encadrement :

$$\frac{-1}{\ln x}\int_0^x h(u)\mathrm{d}u \leq f(x) \leq \frac{-1}{\ln x}\int_0^1 h(u)\mathrm{d}u.$$

d. Donner un équivalent simple de $f(x)$ au voisinage de 1^-.

Étude sur $]-1,0[$ de la série de fonctions $\sum u_n$

5. Prouver que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $]-1,0[$.

On pose désormais, pour x réel élément de $]-1,0[$, $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1+x^n)$ et $h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \ln(1+x^{2n+1})$.

6. **a.** Prouver que pour tout x de $]-1,0[$, on a $g(x) = h(x) + f(x^2)$.

b. Prouver que la série de fonctions définissant $h(x)$ converge normalement sur tout intervalle de la forme $]-a,0]$ avec $a \in [0,1[$.

c. Prouver que g est continue sur $]-1,0[$.

Une autre représentation de $f(x)$

On fixe un réel $x \in [0,1[$ et l'on définit sur $\mathbb{N}^*$ une suite de fonctions (F_n) en posant :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, N \in \mathbb{N}^*,\ F_n(N) = \sum_{p=1}^{N} (-1)^{p-1} \frac{x^{np}}{p},$$

7. **a.** Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{N \to +\infty} F_n(N)$.

b. Prouver que $\left|F_n(N)\right| \leq -\ln(1-x^n)$.

c. En déduire la convergence normale (la variable étant N !) de la série de fonctions $\sum F_n$ sur $\mathbb{N}^*$.

8. Prouver que $f(x) = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p} \frac{x^p}{1-x^p}$.
