Le but de ce problème est d'établir le résultat non trivial selon lequel : si une fonction f possède sur $\mathbb{R}$ un développement en série trigonométrique, celui-ci est unique (et ce, indépendamment de toute hypothèse de régularité sur f !).

Ce théorème est dû à Cantor et c'est en cherchant à en affiner les hypothèses que celui-ci a été amené à créer la théorie des ensembles.

Les trois lemmes que nous établirons sont parfaitement autonomes, ont un intérêt en soi, et utilisent des raisonnements de nature tout à fait différente.

Lemme 1 : Une fonction f, continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, possédant en tout point de $\mathbb{R}$ une pseudo-dérivée seconde nulle, est affine sur $\mathbb{R}$.

Définissons avant tout la pseudo-dérivée seconde d'une fonction f définie au voisinage d'un réel x_0 : c'est la limite, si elle existe, de $\dfrac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2}$ quand h tend vers zéro. Cette limite est notée $f^{[2]}(x_0)$.

On vérifierait sans aucune difficulté que l'ensemble des fonctions possédant en x_0 une pseudo-dérivée seconde est un espace vectoriel, et que l'application $f \mapsto f^{[2]}(x_0)$ est linéaire.

1. **a.** Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. Prouver que f possède en tout point de $\mathbb{R}$ une pseudo-dérivée seconde, et la calculer.

b. Examiner la réciproque.

2. Que peut-on dire de la pseudo-dérivée seconde d'une fonction numérique f en un point x_0 réalisant un maximum local de f ?

3. Prouver que pour établir le lemme, il suffit de le prouver pour les fonctions numériques.

4. Soit donc f une fonction numérique continue sur $\mathbb{R}$, possédant en tout point de $\mathbb{R}$ une pseudo-dérivée seconde nulle. Soient a et b deux réels vérifiant $a<b$, et ε un réel strictement positif.

On définit une fonction g sur $[a,b]$ en posant : $g(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+\varepsilon\dfrac{(x-a)(x-b)}{2}$.

a. Prouver que g possède en tout point de $]a,b[$ une pseudo-dérivée seconde, et la calculer.

b. En déduire que pour tout x de $[a,b]$, on a $g(x)\le g(a)$.

c. Faire un travail analogue avec une autre fonction auxiliaire ressemblant beaucoup à g, et en déduire que f est affine sur $[a,b]$.

d. Prouver que f est affine sur $\mathbb{R}$.

Lemme 2 : Soient (a_n) et (b_n) deux suites de complexes telles que, pour tout réel x, la suite $(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))$ tende vers zéro. Alors les deux suites (a_n) et (b_n) tendent vers zéro.

Soient donc (a_n) et (b_n) deux suites de complexes satisfaisant aux hypothèses du lemme.

5. Prouver que la suite (a_n) tend vers zéro, et que la suite $(b_n \sin(nx))$ tend vers zéro pour tout réel x.

6. Supposons que la suite (b_n) ne tend pas vers zéro.

a. Prouver l'existence d'une suite strictement croissante d'entiers (φ_n) telle que pour tout x de $\mathbb{R}$, la suite $(\sin(\varphi_n x))$ tende vers zéro.

b. Prouver alors l'existence d'une suite strictement croissante d'entiers (α_n) telle que pour tout x de $\mathbb{R}$, la suite $\big(\sin(\alpha_n x)\big)$ tende vers zéro, et vérifiant pour tout n de $\mathbb{N}$: $\alpha_{n+1} \geq 5\alpha_n$.

c. Prouver qu'il est possible de choisir des entiers k_n pour que les segments J_n suivants soient emboîtés :

$$J_n = \left[\frac{\pi/4 + 2k_n\pi}{\alpha_n}, \frac{3\pi/4 + 2k_n\pi}{\alpha_n}\right]$$

d. Conclure à une impossibilité.

e. Quelle différence profonde existant entre les suites $(\cos nx)$ et $(\sin nx)$ explique que le résultat que l'on désirait prouver soit trivial pour la suite (a_n) et nettement plus délicat pour la suite (b_n) ?

Lemme 3 : Soit φ la fonction continue sur $\mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = \dfrac{\sin^2 x}{x^2}$ pour $x \neq 0$ et $\varphi(0)=1$. Alors pour toute série de complexes convergente $\sum a_n$, on a $\displaystyle\lim_{h\to 0} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \varphi(nh) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

On posera, pour h dans $\mathbb{R}^*$, $S(h) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \varphi(nh) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{\sin^2 nh}{n^2 h^2}$. Il est à peu près clair que la série définissant S converge toujours, et pour des raisons de parité, nous nous limiterons à son étude sur $\mathbb{R}_+^*$.

7. Prouver que la fonction dérivée φ' est sommable sur $\mathbb{R}_+^*$.

8. On pose, pour n dans $\mathbb{N}^*$, $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$. Grâce à une transformation d'Abel, prouver, pour tout réel ε strictement positif, l'existence d'un entier N tel que :

$$\forall\, p \geq N,\ \forall\, q \geq N,\ \forall\, h \in \mathbb{R}_+^*,\ \left|\sum_{n=p+1}^{q} a_n \varphi(nh)\right| \leq \varepsilon \left(2 + \int_0^{+\infty} \left|\varphi'(t)\right| dt\right).$$

9. Prouver le lemme.

Théorème de Cantor : Soit f une fonction possédant sur $\mathbb{R}$ un développement en série trigonométrique. Alors celui-ci est unique.

On posera pour tout réel x, $f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \right]$. Définissons alors une fonction F en posant :

$$F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{a_n}{n^2} \cos(nx) + \frac{b_n}{n^2} \sin(nx) \right].$$

10. Prouver que F est définie, continue sur $\mathbb{R}$, et calculer ses coefficients de Fourier.

11. Prouver que F possède en tout point une pseudo-dérivée seconde, et la calculer.

12. On suppose que $f(x) = 0$ pour tout réel x. Il s'agit de prouver que tous les coefficients a_n et b_n sont nuls. Le théorème de Cantor découlera alors immédiatement de ce résultat (en écrivant deux développements en série trigonométrique égaux, et en envisageant leur différence…).

a. Prouver l'existence de deux réels b et c tels que : $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $F(x) = a_0 \dfrac{x^2}{2} + bx + c$.

b. Prouver que $a_0 = b = c = 0$, et conclure.

Fin du problème.