Dans les parties **I** et **III** de ce problème, I désigne le segment $[0,1]$, p et f sont deux fonctions continues sur I à valeurs réelles, et on étudie le problème de l'existence et de l'unicité de solutions réelles, définies sur I, des équations différentielles suivantes :

$$(E_0) \;:\; -u''(x) + p(x)u(x) = 0\,,$$
$$(E_f) \;:\; -u''(x) + p(x)u(x) = f(x)\,,$$

solutions vérifiant, en outre, les conditions suivantes aux extrémités de I :

$$(C) \;:\; u(0) = u(1) = 0\,.$$

Une fonction u, de classe $\mathcal{C}^2$ sur I, est dite solution du problème $\mathcal{P}_0$ (respectivement du problème $\mathcal{P}_f$) si elle est solution de (E_0) (respectivement de (E_f)) et si elle vérifie les conditions (C).

Enfin, la partie **II** étudie le cas particulier $p(x) = -x$.

Partie I

(Exemples)

1. **a.** En envisageant la fonction p constante égale à $-\pi^2$, prouver que le problème $\mathcal{P}_0$ peut posséder une infinité de solutions.

b. Étudier le problème $\mathcal{P}_f$ avec la fonction p constante égale à $-\pi^2$ et la fonction f constante égale à 1. Qu'en conclure ?

2. Résoudre le problème $\mathcal{P}_f$ dans les deux cas suivants :

a. La fonction p est nulle et la fonction f constante égale à 1.

b. La fonction p est constante égale à 1 et $f(x) = \mathrm{e}^{2x}$ pour tout x de I.

c. La fonction p est constante égale à 1 et $f(x) = \mathrm{e}^{x}$ pour tout x de I.

3. On choisit dans cette question $p(x) = \dfrac{-3}{(x^2+1)^2}$, de sorte que (E_0) s'écrit : $u''(x) + \dfrac{3}{(x^2+1)^2}u(x) = 0$.

a. On pose $y(x) = u(x)\sqrt{x^2+1}$, ou encore $u(x) = \dfrac{y(x)}{\sqrt{x^2+1}}$.

Vérifier (et ce calcul n'a strictement rien d'inhumain, un élève de MP doit pouvoir calculer de manière fiable en moins de 5 minutes la dérivée seconde de u…) que y est solution de l'équation différentielle (#) : $(x^2+1)y'' - 2xy' + 2y = 0$ (en plus, je donne le résultat !).

b. Donner les degrés possibles d'éventuelles solutions polynomiales de l'équation différentielle (#), puis en donner deux solutions polynomiales.

c. Résoudre le problème $\mathcal{P}_0$.

Partie II

On choisit ici $p(x) = -x$ et on étudie l'équation différentielle (E_0), non plus seulement sur $[0,1]$, mais sur $\mathbb{R}$.

4. **a.** Prouver que l'équation différentielle (E_0) : $u''(x) + xu(x) = 0$ possède une unique solution sur $\mathbb{R}$, qui sera notée ω dans la suite, vérifiant : $\omega(0) = 1$ et $\omega'(0) = 0$ (on citera avec précision le théorème utilisé).

b. On note ρ la solution de (E_0) vérifiant $\rho(0) = 0$ et $\rho'(0) = 1$. Prouver que pour toute solution f de (E_0), on a :

$$f = f(0)\omega + f'(0)\rho .$$

5. Donner le développement limité de ω à l'ordre 1 au voisinage de 0, et en déduire (grâce à l'équation différentielle (E_0)) son développement limité à l'ordre 4 (toujours au voisinage de 0).

6. Comportement de ω sur $\mathbb{R}^+$

On désire prouver que ω s'annule une infinité de fois sur $\mathbb{R}^+$.

On fixe pour cela un entier n supérieur ou égal à 1, et on étudie sur l'intervalle $I_n = [2n\pi, (2n+1)\pi]$ la fonction définie par : $\forall x \in I_n,\ \delta(x) = \omega'(x)\sin x - \omega(x)\cos x$.

a. Exprimer simplement la dérivée de δ.

b. Dresser le tableau de variations de la fonction δ sur l'intervalle I_n en supposant, par exemple, que l'on a $\omega(x) > 0$ pour tout x de I_n.

c. Conclure.

7. Soit y une solution de (E_0) sur $]0,+\infty[$ et z la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$y(x) = \exp\left(-\frac{2}{3}x^{3/2}\right)z(x).$$

Montrer que la fonction z est solution sur $]0,+\infty[$ de l'équation différentielle :

$$(E_2)\ :\ z'' - 2\sqrt{x}z' - \frac{1}{2\sqrt{x}}z = 0 .$$

8. On pose, pour tout réel strictement positif x :

$$I(x) = \int_0^{+\infty} \exp\left(-t^2\sqrt{x}\right)\cos\frac{t^3}{3}\,\mathrm{d}t .$$

a. Vérifier l'existence de $I(x)$ pour tout réel strictement positif x.

b. Déterminer la limite de la fonction I en $+\infty$ (on pourra utiliser le changement de variable $u = t\sqrt[4]{x}$).

c. Prouver que I est dérivable sur $]0,+\infty[$, et déterminer sa dérivée.

d. Prouver l'on a, pour tout réel strictement positif x :

$$I'(x) = -\int_0^{+\infty} t\exp\left(-t^2\sqrt{x}\right)\sin\frac{t^3}{3}\,\mathrm{d}t .$$

e. Prouver que la fonction I est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$, et qu'elle y est solution de l'équation (E_2).

9. Comportement de ω sur $\mathbb{R}^-$

a. On fait momentanément l'hypothèse que ω s'annule sur $\mathbb{R}^-$. Soit alors α sa plus grande annulation négative, de sorte que α ne s'annule pas sur $]\alpha, 0[$.

Étudier les variations de ω' sur $]\alpha, 0[$, et conclure à une impossibilité.

b. Prouver que ω est convexe et décroissante sur $\mathbb{R}^-$.

Partie III

(Résultats généraux)

Dans cette partie, on supposera la fonction p **positive** : $\forall x \in I,\, p(x) \geq 0$.

10. **a.** Soit u une solution du problème $\mathcal{P}_0$, c'est à dire une solution de l'équation différentielle (E_0) satisfaisant les conditions (C). Prouver la relation :

$$\int_0^1 [u'(x)^2 + p(x)u(x)^2]\mathrm{d}x = 0\,.$$

En déduire que la seule solution du problème $\mathcal{P}_0$ est la fonction nulle.

b. Démontrer que, pour des fonctions p et f données, il existe au plus une solution au problème $\mathcal{P}_f$.

11. On donne deux solutions linéairement indépendantes u_1 et u_2 de l'équation différentielle (E_0), et l'on considère la fonction g définie sur I par :

$$g(x) = u_1(0)u_2(x) - u_2(0)u_1(x)\,.$$

a. Prouver que les réels $u_1(0)$ et $u_2(0)$ ne sont pas simultanément nuls (penser au wronskien).

b. Prouver que si $g(1) = 0$, alors g est identiquement nulle sur I.

c. En déduire que $g(1) \neq 0$.

12. On désigne par v une solution particulière de l'équation (E_f), et par λ et μ deux scalaires. Soient u et X la fonction et le vecteur définis par :

$$u(x) = \lambda u_1(x) + \mu u_2(x) + v(x)\ ;\ X = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}.$$

a. Démontrer que, pour que la fonction u soit solution du problème $\mathcal{P}_f$, il faut et il suffit que le vecteur X vérifie une relation matricielle du type :

$$UX = B\,.$$

où U est une matrice carrée d'ordre 2 et B un vecteur colonne qui seront précisés.

b. Démontrer que le problème $\mathcal{P}_f$ possède une solution unique.