Dans tout le problème, l'entier n est donné, strictement supérieur à 1. L'espace $E = \mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique, son produit scalaire étant noté $(x|y)$ et la norme euclidienne $\| \ \|$.

L'espace des matrices carrées réelles de taille n est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et celui des matrices symétriques est noté $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

On identifie une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base canonique est A ; de même on identifie les éléments x de E aux matrices colonnes de leurs coordonnées dans la base canonique de E. Ces identifications donnent un sens au produit Ax.

Partie 1
Étude d'une norme sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$

1. Définition d'une norme sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$

a. Soit U un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que la fonction $x \mapsto |(Ux|x)|$ est bornée sur la boule unité de E, constituée des vecteurs de norme inférieure ou égale à 1.

Si $x = (x_1, \dots, x_n)$ est un vecteur de norme 1, il est clair que $|x_i| \le 1$ pour tout i puisque la somme des carrés est plus petite que 1. Alors, si $U = (a_{i,j})$, $|(Ux|x)| = \left|\sum_{i,j} a_{i,j} x_i x_j\right| \le \sum_{i,j} |a_{i,j}|$.

b. Soit U un élément de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ tel que $(Ux|x) = 0$ pour tout x de E. Prouver que U est la matrice nulle.

Soit λ une valeur propre de U et x_0 un vecteur propre associé. Puisque $(Ux_0|x_0) = 0$, il vient $\lambda = 0$. La seule valeur propre de U est donc nulle et comme U est diagonalisable, U est nul.

c. Montrer que l'application N, de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$, qui à un élément U de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ associe le réel $N(U) = \sup\left\{ |(Ux|x)| \ ; \ \|x\| \le 1 \right\}$ est une norme sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

La vérification des axiomes de positivité et de séparation est évidente (grâce à la question précédente). L'homogénéité est à peu près claire. Quant à l'identité triangulaire, c'est un classique de la manipulation des sup :

$\forall x \in \mathbb{R}^n$, $|((U+V)x|x)| \le |(Ux|x)| + |(Vx|x)| \le N(U) + N(V)$ *, puis on passe au sup à gauche.*

2. Propriété de multiplicativité

a. Soient deux matrices U et V de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que UV est dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si ces matrices commutent.

$$UV \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow (UV)^{\mathrm{T}} = UV \Leftrightarrow V^{\mathrm{T}}U^{\mathrm{T}} = UV \Leftrightarrow VU = UV.$$

b. Soit U un élément de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On désigne par $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ses valeurs propres, et par $\rho(U)$ le maximum des valeurs absolues des λ_i. Prouver que $\rho(U) = N(U)$, et que pour tout x de E, on a $\|Ux\| \le N(U)\|x\|$.

Soit $e_1, \dots, e_n$ une base orthonormée de vecteurs propres de U associés respectivement à $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Alors, si $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$, il vient :

$$|(Ux|x)| = |(\lambda_1 x_1 e_1 + \dots + \lambda_n x_n e_n | x_1 e_1 + \dots + x_n e_n)| = |\lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2| \le \rho(U)\|x\|^2$$

et :

$$\left\|Ux\right\|^2 = (\lambda_1 x_1 e_1 + \ldots + \lambda_n x_n e_n | \lambda_1 x_1 e_1 + \ldots + \lambda_n x_n e_n) = \lambda_1^2 x_1^2 + \ldots + \lambda_n^2 x_n^2 \le \rho(U)^2 \left\|x\right\|^2 .$$

De la première majoration, si l'on choisit x de norme inférieure ou égale à 1 et si l'on passe au sup à gauche, on tire $N(U) \le \rho(U)$; mais pour $x = e_n$, la majoration est une égalité ce qui prouve que $\rho(U) \le N(U)$.

c. Déduire des questions précédentes que si U et V sont deux éléments de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ qui commutent, alors on a l'inégalité $N(UV) \le N(U)N(V)$ (on commencera par prouver que pour tout x de E, on a $\left|(UVx|x)\right| \le \left\|Ux\right\| \times \left\|Vx\right\|$).

Soit x un vecteur de norme plus petite que 1. Comme U est symétrique, $(UVx|x) = (Vx|Ux)$, on combine avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour obtenir :

$$\left|(UVx|x)\right| = (Ux|Vx) \le \left\|Ux\right\| \times \left\|Vx\right\| \le N(U) \times N(V) .$$

Il n'y a plus qu'à passer au sup à gauche…

Partie 2
Une caractérisation des matrices symétriques définies positives

1. Propriétés élémentaires

Soit A un élément de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A est définie positive si et seulement si il existe une matrice inversible M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = M^{\mathrm{T}} M$.

Si $A = M^{\mathrm{T}} M$, alors A est trivialement symétrique et, pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ X \neq 0$, il vient :

$$X^{\mathrm{T}} A X = X^{\mathrm{T}} M^{\mathrm{T}} M X = \left\|MX\right\|^2 > 0 .$$

Par définition, A est donc définie positive.

Réciproquement on sait (c'est du cours) que A est définie positive si et seulement si ses valeurs propres sont strictement positives. De plus, A peut être diagonalisée au moyen d'une matrice orthogonale. On peut donc écrire :

$$A = P\,\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\,P^{-1} = P\,\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})^2\,P^{\mathrm{T}} = M^{\mathrm{T}} M \quad \textit{avec} \quad M = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})\,P^{\mathrm{T}} .$$

2. Un lemme

Soit A une matrice symétrique définie positive. On « prolonge » A en un élément A' de $\mathcal{S}_{n+1}(\mathbb{R})$ de la façon suivante :

$$A' = \begin{pmatrix} A & C \\ C^{\mathrm{T}} & a \end{pmatrix} \quad \text{où } C \text{ est une matrice de } \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ et } a \text{ un réel.}$$

On suppose que $\det(A') > 0$. Le but de ce qui suit est de prouver que A' est encore définie positive.

a. Prouver que $a - C^{\mathrm{T}} A^{-1} C > 0$ (on pourra multiplier la matrice A' par la matrice $\begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}C \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$).

$$A' \times \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}C \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & C \\ C^{\mathrm{T}} & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}C \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ C^{\mathrm{T}} A^{-1} & a - C^{\mathrm{T}} A^{-1} C \end{pmatrix}.$$

Il n'y a plus qu'à prendre les déterminants (triangulaires par blocs) dans cette égalité pour avoir l'inégalité demandée.

b. En déduire qu'il est possible de trouver une matrice N de la forme $N = \begin{pmatrix} M & D \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ avec M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, D matrice ligne et α réel, vérifiant $A' = N^{\mathrm{T}} N$ et conclure.

$$N^{\mathrm{T}}N = A' \Leftrightarrow \begin{pmatrix} M^{\mathrm{T}} & 0 \\ D^{\mathrm{T}} & \alpha \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} M & D \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & C \\ C^{\mathrm{T}} & a \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} M^{\mathrm{T}}M = A \\ M^{\mathrm{T}}D = C \\ D^{\mathrm{T}}M = C \\ D^{\mathrm{T}}D + \alpha^2 = a \end{cases}.$$

A étant symétrique définie positive, on connaît l'existence de M telle que $M^{\mathrm{T}}M = A$. On choisit alors D telle que $D = (M^{\mathrm{T}})^{-1}C$. La dernière équation demande alors à α de vérifier $\alpha^2 = a - C^{\mathrm{T}}A^{-1}C$ ce qui est possible puisque, précisément, $a - C^{\mathrm{T}}A^{-1}C > 0$. Avec ces choix de M, de D et de α, on a $A' = N^{\mathrm{T}}N$: A' est définie positive.

3. Mineurs de Gauss

Pour un élément A de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on notera A_p la matrice de taille p extraite de A en position « supérieure gauche ».

a. Prouver que si A est définie positive, alors on a $\det(A_p) > 0$ pour tout entier p compris entre 1 et n.

C'est la question la plus délicate du problème si l'on ne voit pas une évidence ! Si l'on prouve que A_p (qui est trivialement symétrique) est encore positive, on aura bien entendu $\det(A_p) > 0$. Or, il y a juste à constater que si X est un élément non nul de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ et si l'on prolonge X en un élément $\tilde{X}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ en lui rajoutant des zéros sur les dernières lignes, alors $X^{\mathrm{T}}A_pX = \tilde{X}^{\mathrm{T}}A\tilde{X} > 0$, ce qui prouve que A_p est définie positive.

b. Réciproquement, on suppose que $\det(A_p) > 0$ pour tout p entre 1 et n. Prouver grâce au lemme que A est définie positive (ainsi, la définie positivité d'une matrice peut se tester par le calcul de quelques déterminants).

*C'est tout à fait immédiat par récurrence en utilisant le résultat de la question **2.b.***

Partie 3
Inversion d'une matrice symétrique définie positive

1. Étude d'une condition d'inversibilité

Dans toute la suite du problème, on supposera donné un élément T de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ tel que $N(I_n - T) \le k$, où k est un réel vérifiant $0 < k < 1$ (I_n est la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).

a. Donner un encadrement des valeurs propres de T, et en déduire que T est définie positive.

Il est bien évident que les valeurs propres de $I_n - T$ sont les $1 - \lambda$ où les λ sont les valeurs propres de T. Puisque $N(I_n - T) = \rho(I_n - T)$, on a $|1 - \lambda| \le k$ pour toute valeur propre de T, soit $0 < 1 - k \le \lambda \le 1 + k$. Les valeurs propres de T sont donc strictement positives, T est définie positive.

b. En utilisant les valeurs propres de T^{-1}, prouver que :

$$N(T^{-1}) \le \frac{1}{1-k} \quad \text{et} \quad N(T^{-1} - I_n) \le \frac{k}{1-k}.$$

Les valeurs propres de T^{-1} sont les $1/\lambda$, celles de $T^{-1} - I_n$ les $1/\lambda - 1$. Or $0 \le \dfrac{1}{1+k} \le \dfrac{1}{\lambda} \le \dfrac{1}{1-k}$ et donc $N(T^{-1}) \le \dfrac{1}{1-k}$. Par ailleurs, $N(T^{-1} - I_n) = N(T^{-1}(I_n - T)) \le N(T^{-1})N(I_n - T) \le \dfrac{k}{1-k}$.

2. Un algorithme

On considère la suite (Y_p) de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définies par la récurrence :

$$Y_0 = I_n \ ; \ Y_{p+1} = Y_p(2I_n - TY_p)\,.$$

a. Montrer que les matrices Y_p sont symétriques et commutent avec T.

Il est facile de voir par récurrence que les Y_p sont des polynômes en T. Ce sont donc des matrices symétriques commutant avec T.

b. On pose $Z_p = I_n - TY_p$. Prouver que $Z_{p+1} = {Z_p}^2$.

Question inaccessible à ceux qui ne connaissent pas leurs identités remarquables.

c. On pose $e_p = N(Y_p - T^{-1})$. Prouver, en majorant au préalable $N(Z_p)$, que pour tout entier p, on a l'inégalité :

$$e_p \leq \frac{k^{2^p}}{1-k}\,.$$

L'égalité $Z_{p+1} = {Z_p}^2$ combinée avec la majoration $N(UV) \leq N(U)N(V)$ donne immédiatement :

$$N(Z_p) = N(Z_0^{2^p}) \leq N(Z_0)^{2^p} \leq k^{2^p}\,,$$

puis :

$$e_p = N(Y_p - T^{-1}) \leq N(T^{-1})N(I_n - TY_p) = N(T^{-1})N(Z_p) \leq \frac{k^{2^p}}{1-k}\,.$$

d. Que peut-on en déduire à propos de la suite (Y_p) ? Quel commentaire supplémentaire peut-on faire ?

La suite (Y_p) converge donc vers T^{-1}, et même sacrément vite !