Dans tout le problème, l'entier n est donné, strictement supérieur à 1. L'espace $E = \mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique, son produit scalaire étant noté $(x|y)$ et la norme euclidienne $\| \ \|$.

L'espace des matrices carrées réelles de taille n est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et celui des matrices symétriques est noté $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

On identifie une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base canonique est A ; de même on identifie les éléments x de E aux matrices colonnes de leurs coordonnées dans la base canonique de E. Ces identifications donnent un sens au produit Ax.

Partie 1
Étude d'une norme sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$

1. Définition d'une norme sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$

a. Soit U un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que la fonction $x \mapsto \left|(Ux|x)\right|$ est bornée sur la boule unité de E, constituée des vecteurs de norme inférieure ou égale à 1 (inutile pour ce faire d'aller chercher des arguments intellectuels, calculer explicitement $\left|(Ux|x)\right|$, et le majorer en fonction des coefficients de la matrice U)

b. Soit U un élément de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ tel que $(Ux|x) = 0$ pour tout x de E. Prouver que U est la matrice nulle.

c. Montrer que l'application N, de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$, qui à un élément U de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ associe le réel $N(U) = \sup\left\{\left|(Ux|x)\right| \ ; \ \|x\| \leq 1\right\}$ est une norme sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

2. Propriété de multiplicativité

a. Soient deux matrices U et V de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que UV est dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si ces matrices commutent.

b. Soit U un élément de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On désigne par $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ses valeurs propres, et par $\rho(U)$ le maximum des valeurs absolues des λ_i. Prouver que $\rho(U) = N(U)$, et que pour tout x de E, on a $\|Ux\| \leq N(U)\|x\|$.

c. Déduire des questions précédentes que si U et V sont deux éléments de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ qui commutent, alors on a l'inégalité $N(UV) \leq N(U)N(V)$ (on commencera par prouver que pour tout x de E, on a $\left|(UVx|x)\right| \leq \|Ux\| \times \|Vx\|$).

Partie 2
Une caractérisation des matrices symétriques définies positives

1. Propriétés élémentaires

Soit A un élément de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A est définie positive si et seulement si il existe une matrice inversible M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = M^{\mathrm{T}} M$.

2. Un lemme

Soit A une matrice symétrique définie positive. On « prolonge » A en un élément A' de $\mathcal{S}_{n+1}(\mathbb{R})$ de la façon suivante :

$$A' = \begin{pmatrix} A & C \\ C^{\mathrm{T}} & a \end{pmatrix} \text{ où } C \text{ est une matrice de } \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ et } a \text{ un réel.}$$

On suppose que $\det(A') > 0$. Le but de ce qui suit est de prouver que A' est encore définie positive.

a. Prouver que $a - C^{\mathrm{T}}A^{-1}C > 0$ (on pourra multiplier la matrice A' par la matrice $\begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}C \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$).

b. En déduire qu'il est possible de trouver une matrice N de la forme $N = \begin{pmatrix} M & D \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ avec M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, D matrice ligne et α réel, vérifiant $A' = N^{\mathrm{T}}N$ et conclure.

3. Mineurs de Gauss

Pour un élément A de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on notera A_p la matrice de taille p extraite de A en position « supérieure gauche ».

a. Prouver que si A est définie positive, alors on a $\det(A_p) > 0$ pour tout entier p compris entre 1 et n.

b. Réciproquement, on suppose que $\det(A_p) > 0$ pour tout p entre 1 et n. Prouver grâce au lemme que A est définie positive (ainsi, la définie positivité d'une matrice peut se tester par le calcul de quelques déterminants).

Partie 3
Inversion d'une matrice symétrique définie positive

1. Étude d'une condition d'inversibilité

Dans toute la suite du problème, on supposera donné un élément T de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ tel que $N(I_n - T) \leq k$, où k est un réel vérifiant $0 < k < 1$ (I_n est la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).

a. Donner un encadrement des valeurs propres de T, et en déduire que T est définie positive.

b. En utilisant les valeurs propres de T^{-1}, prouver que :

$$N(T^{-1}) \leq \frac{1}{1-k} \quad \text{et} \quad N(T^{-1} - I_n) \leq \frac{k}{1-k}.$$

2. Un algorithme

On considère la suite (Y_p) de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définies par la récurrence :

$$Y_0 = I_n \ ; \ Y_{p+1} = Y_p(2I_n - TY_p).$$

a. Montrer que les matrices Y_p sont symétriques et commutent avec T.

b. On pose $Z_p = I_n - TY_p$. Prouver que $Z_{p+1} = Z_p^{\ 2}$.

c. On pose $e_p = N(Y_p - T^{-1})$. Prouver, en majorant au préalable $N(Z_p)$, que pour tout entier p, on a l'inégalité :

$$e_p \leq \frac{k^{2^p}}{1-k}$$

d. Que peut-on en déduire à propos de la suite (Y_p) ? Quel commentaire supplémentaire peut-on faire ?