PROBLÈME 1

L'objet de ce problème est, entre autres choses, d'établir le résultat non trivial suivant : si une fonction f, définie au voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$, est développable en série entière et vérifie $f(0) \neq 0$, alors la fonction $1/f$ est, elle aussi, développable en série entière au voisinage de 0.

Pour toute suite $a = (a_n)$ de réels, on désigne par S_a la somme de la série entière $\sum a_n t^n$ lorsque celle-ci a un rayon de convergence non nul.

Si $a = (a_n)$ et $b = (b_n)$ sont deux suites de réels, et si est un réel, on définit les trois suites $a + b$, $a * b$ et λa de la façon suivante :

$$a + b = (\alpha_n) \quad \text{avec} \quad \alpha_n = a_n + b_n \text{ pour tout } n\ ;$$

$$a * b = (\beta_n) \quad \text{avec} \quad \beta_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \text{ pour tout } n\ ;$$

$$\lambda a = (\gamma_n) \quad \text{avec} \quad \gamma_n = \lambda a_n \text{ pour tout } n.$$

On notera ε la suite telle que $\varepsilon_0 = 1$ et $\varepsilon_n = 0$ pour tout entier n non nul.

On désigne par E l'ensemble des suites (a_n) de réels ayant la propriété suivante :

$$\exists M_a \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \left|a_n\right| \leq M_a{}^n .$$

On remarquera qu'une telle constante M_a n'est pas unique, et que n'importe quelle constante qui lui est supérieure convient encore.

1. Donner des exemples de suites appartenant à E et de suites n'appartenant pas à E.

2. Soit (a_n) une suite de réels telle que :

$$\exists M \in \mathbb{R}, \exists k \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \left|a_n\right| \leq k M^n\ ;$$

Prouver que la suite (a_n) est un élément de E.

3. On se donne dans toute cette question deux éléments a et b de E.

a. Montrer que $a + b \in E$ et que $\lambda a \in E$.

b. Après avoir établi l'inégalité $n + 1 \leq 2^n$ pour tout entier n, montrer que $a * b \in E$.

4. **a.** Prouver que si une suite $a = (a_n)$ est dans E, le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n t^n$ est non nul.

b. Inversement, prouver que si la série entière $\sum a_n t^n$ a un rayon de convergence non nul, la suite a est dans E.

5. On désigne par a et b deux éléments de E, et par λ un réel.

Exprimer, quand c'est possible, en fonction de $S_a(t)$, de $S_b(t)$ et de λ, les nombres $S_{a+b}(t)$, $S_{\lambda a}(t)$ et $S_{a*b}(t)$.

6. Prouver que la suite ε est élément neutre pour la loi $*$, c'est-à-dire que l'on a :

$$\forall a \in E,\ a * \varepsilon = \varepsilon * a = a\ .$$

Que vaut S_ε ?

7. Soit $a \in E$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une suite b de réels telle que :

$$a * b = b * a = \varepsilon\ ;$$

Écrire les relations de récurrence qui déterminent la suite b.

8. On suppose $a_0 = 1$.

Montrer que si b est une suite telle que $a * b = b * a = \varepsilon$, alors on a :

$$\left|b_n\right| \leq (2M_a)^n \text{ pour tout } n \geq 1\ .$$

Que peut-on en conclure pour la suite b ?

9. Déduire de ce qui précède que la condition de la question **II.7.** est une condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite $a \in E$ ait, pour la loi $*$, un inverse **dans *E***.

Que peut-on dire de $S_b(t)$ si b est l'inverse de a ?

10. Établir le résultat énoncé au tout début de l'énoncé, à propos de l'inverse d'une fonction développable en série entière (il s'agit juste de récapituler clairement ce qui vient d'être fait...)

11. Soit (α_n) une suite de réels telle que :

$$\alpha_0 = 1 \text{ et } \left|\alpha_n\right| \leq 1\ \forall n \geq 1\ .$$

a. Prouver que le rayon de convergence de convergence de la série $\sum \alpha_n x^n$ est supérieur ou égal à 1.

b. Prouver, en utilisant les questions **8.** et **9.**, que la fonction $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n x^n$ ne s'annule pas sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$.

12. Prouver que la fonction tangente est développable en série entière au voisinage de 0.

Minorer, grâce à la question **II.2.**, le rayon de convergence de la série entière obtenue.

PROBLÈME 2

On désigne par E l'ensemble des suites réelles (a_n) telles que la série entière $\sum a_n x^n$ possède un rayon de convergence supérieur ou égal à 1.

Étant donnée une suite $a = (a_n)$ de E, on dira que cette suite « converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ au sens d'Abel » (et l'on notera alors $(a_n) \underset{\text{Abel}}{\rightarrow} \ell$, ℓ étant appelée la limite de la suite (a_n) au sens d'Abel) si :

$$\lim_{x \to 1^-} (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \ell\ .$$

1. **a.** Soit $a = (a_n)$ la suite constante égale à $\alpha \in \mathbb{R}$.

Prouver que a est convergente au sens d'Abel, et déterminer sa limite en ce sens.

b. Prouver que la suite $\left((-1)^n\right)$ est convergente au sens d'Abel et déterminer sa limite en ce sens.

c. Même question pour la suite $\left(\frac{1}{n}\right)$.

d. Même question pour la suite $\left((-1)^{n-1}n\right)$.

e. Même question pour la suite $(\cos n)$.

2. Soit (a_n) une suite de réels convergeant (au sens classique) vers $\alpha \in \mathbb{R}$. L'objet de cette question est de prouver que la suite (a_n) converge aussi vers α au sens d'Abel.

On fixe un réel $\varepsilon > 0$.

a. Prouver l'existence d'un entier N tel que, pour tout $x \in [0,1[$, on ait :

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - \frac{\alpha}{1-x}\right| \leq \sum_{n=0}^{N-1} \left|a_n - \alpha\right| x^n + \varepsilon \frac{x^N}{1-x}.$$

b. En déduire que pour tout $x \in [0,1[$, on a :

$$\left|(1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - \alpha\right| \leq (1-x)P(x) + \varepsilon \text{ , où } P \text{ est un certain polynôme.}$$

c. Conclure soigneusement.

3. Réciproquement, une suite convergeant au sens d'Abel est-elle convergente au sens classique ?

4. Pour tout entier non nul n, on note $\sigma(n)$ la somme des diviseurs de l'entier n.

Soit x un réel élément de $]-1,1[$.

a. Prouver la sommabilité de la famille $(px^{np})_{n,p\geq 1}$.

b. En déduire l'identité :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{(1-x^n)^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \sigma(k) x^k \ .$$

c. Prouver alors (après avoir simplifié par x l'identité précédente, puis… fait ce qu'il faut) l'égalité :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sigma(k)}{k} x^k \ .$$

5. On pose, pour $x \in [0,1[$, $f_n(x) = (1-x)\dfrac{x^n}{1-x^n} = \dfrac{x^n - x^{n+1}}{1-x^n}$ et $P_n(x) = n-(n+1)x + x^{n+1}$.

a. Déterminer la limite de f_n en 1, et exprimer la dérivée de f_n en fonction de P_n.

b. Étudier le signe de P_n sur $[0,1]$, puis dresser le tableau de variations de f_n.

c. Prouver que $0 \leq f_n(x) \leq \dfrac{1}{n}$ pour tout x de $[0,1[$.

6. Déduire des questions précédentes que la suite $\left(\dfrac{\sigma(n)}{n}\right)$ converge vers $\dfrac{\pi^2}{6}$ au sens d'Abel.