L'objet de ce problème est l'étude de suites définies « avec des sinus et des cosinus ». Ces études sont totalement indépendantes avec, suivant les cas, des argumentations primaires ou plus sophistiquées.

Afin de respecter mes petits nerfs fragiles (et pour que ce qui suit présente un quelconque intérêt), vous serez bien aimables de ne pas inventer un théorème débile du genre : « puisque la fonction cosinus n'a pas de limite en $+\infty$, si (x_n) est une suite tendant vers $+\infty$, la suite $(\cos x_n)$ ne peut pas avoir de limite »… un simple petit coup d'œil sur la suite $(\cos 2n\pi)$ devrait assez facilement vous convaincre de l'ineptie d'une telle affirmation. D'accord ? Alors merci de ne pas affirmer comme « évidentes » des choses qui ne le sont pas du tout.

La partie **VII.** est réservée aux 5/2.

I. Étude élémentaire de la suite $(\cos n)$

On suppose ici la suite $(\cos n)$ convergente, de limite ℓ.

1. En calculant $\cos(n+1)-\cos(n-1)$, prouver que la suite $(\sin n)$ tend vers zéro.

2. En calculant $\sin(n+1)-\sin(n-1)$, déterminer ℓ, et conclure à une impossibilité.

3. Prouver que la suite $(\cos n)$ converge au sens de Cesàro, et donner sa limite en ce sens.

II. Étude de la suite $(\cos(\ln n))$

Conformément à l'usage, on notera $[x]$ la partie entière d'un réel x.

4. **a.** Prouver l'inégalité $|\cos a-\cos b|\leq|a-b|$, valable pour tous réels a et b.

b. En déduire que $\cos n-\cos(\ln[e^n]) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

c. Déterminer la nature de la suite $(\cos(\ln n))$.

III. Étude de la suite $(\cos 2^n)$

On pose ici, pour tout entier n, $u_n=\cos 2^n$. On suppose que la suite (u_n) est convergente, de limite ℓ.

5. **a.** Déterminer une relation de récurrence reliant u_{n+1} et u_n.

b. En déduire que les deux seules valeurs possibles de ℓ sont 1 et $-\dfrac{1}{2}$.

6. On suppose dans cette question que la suite (u_n) tend vers 1.

a. Prouver que u_n est différent de 1 pour tout n.

b. Calculer, en utilisant la formule de récurrence trouvée en **5.**, la limite de $\dfrac{u_{n+1}-1}{u_n-1}$.

c. Conclure à une impossibilité (*vous serez gentils de ne pas commettre une erreur indigne d'un élève de Terminale, et de bien réfléchir au message contenu dans la question précédente. Merci*).

7. Prouver par une méthode analogue à celle de la question **6.** que la suite (u_n) ne peut tendre vers $-\dfrac{1}{2}$.

Que conclure de tout cela ?

IV. Étude de la suite $\left(\sin(2+\sqrt{3})^n\pi\right)$

8. **a.** Déterminer l'expression générale des suites (u_n) vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 4u_{n+1} - u_n$.

b. En déduire l'existence d'une suite (ε_n) tendant vers 0 telle que $(2+\sqrt{3})^n + \varepsilon_n$ soit entier pour tout n, et conclure quant à la convergence de la suite $\left(\sin(2+\sqrt{3})^n\pi\right)$.

V. Étude d'une suite $u_{n+1} = \sin u_n$

On fixe un élément u_0 dans $\mathbb{R}$ et on définit par récurrence une suite (u_n) en posant :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sin u_n .$$

On exclura le cas où $u_0 \in \pi\mathbb{Z}$ car alors l'étude de la suite est relativement facile (du moins je l'espère !).

9. **a.** Prouver que les u_n sont tous non nuls. Pourquoi peut-on toujours supposer que $u_1 > 0$? (Cette hypothèse sera supposée vérifiée dans la suite).

b. Prouver que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ décroît, et conclure quant à sa convergence.

c. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n = \frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} .$$

Déterminer la limite de la suite (v_n).

d. En déduire un équivalent de u_n.

VI. Étude de la suite $(\sin(n!\,\pi \mathrm{e}))$

On pose, pour tout entier n, $s_n = 1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \ldots + \dfrac{1}{n!}$.

10. **a.** En utilisant la formule de Taylor avec reste intégrale, prouver que :

$$0 < \mathrm{e} - s_n \leq \frac{\mathrm{e}}{(n+1)!} .$$

b. En déduire la convergence de la suite (s_n) ainsi que la valeur de sa limite.

c. On suppose dans cette question que e est rationnel, $\mathrm{e} = \dfrac{p}{q}$ avec p et q entiers.

Pourquoi peut-on supposer que q est supérieur ou égal à 3 ?

Prouver que $q!(\mathrm{e} - s_q)$ est entier et conclure.

11. **a.** Prouver grâce à la question **10.a.** qu'il existe une suite (k_n) d'entiers, et une suite (ε_n) tendant vers 0, telles que pour tout n, on ait :

$$n!\pi e = k_n\pi + \varepsilon_n .$$

b. Conclure quant à la convergence de la suite $(\sin n!\pi e)$.

VII. Étude des suites de la forme $(\cos n\theta)$

On fixe dans cette partie un réel quelconque θ que l'on supposera ne pas être dans $2\pi\mathbb{Z}$ (sinon la suite étudiée est constante égale à 1 !).

12. On suppose dans cette question que θ et π sont *commensurables*, c'est à dire que le rapport θ/π est rationnel (on pourra écrire $\theta = \frac{p}{q}\pi$ avec p et q entiers).

Quelle particularité possède alors la suite $(\cos n\theta)$? Conclure quant à sa convergence.

On suppose désormais que θ *et* π *sont incommensurables, c'est à dire que le rapport* θ/π *est irrationnel. L'étude fine de la suite* $(\cos n\theta)$ *est alors beaucoup plus délicate et nécessite la connaissance d'un résultat général intéressant.*

13. Soit G un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ (G est donc une partie de $\mathbb{R}$ stable pour l'addition et par passage à l'opposé), non réduit à $\{0\}$. Le but de ce qui suit est de prouver que G est soit monogène (c'est-à-dire de la forme $a\mathbb{Z}$), soit dense dans $\mathbb{R}$.

Posons $a = \inf\{g \in G, g > 0\}$. Pourquoi a existe-t-il ?

a. On suppose que a n'est pas nul. Prouver que si a n'était pas dans G, il existerait plusieurs éléments de G entre a et $2a$, puis que cela conduit à une contradiction. Prouver alors que G se réduit à $a\mathbb{Z} = \{ka,\ k \in \mathbb{Z}\}$ (pour l'inclusion $G \subset a\mathbb{Z}$, on effectuera la division euclidienne d'un élément de G par a).

b. On suppose que a est nul. Prouver que G est dense dans $\mathbb{R}$.

14. **a.** Prouver que l'ensemble $S = \theta\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z} = \{k\theta + 2k'\pi,\ \ k, k' \in \mathbb{Z}\}$ est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$.

b. Prouver que si S était de la forme $a\mathbb{Z}$, le rapport θ/π serait rationnel. Qu'en conclure ?

c. En déduire que tout élément de $[-1,1]$ est limite d'une suite extraite convergente de la suite $(\cos n\theta)$.