Exercice 1

1. **a.** Justifier que la série géométrique $\sum x^n$ peut être dérivée terme à terme sur $]-1,1[$ et en déduire, pour $x \in]-1,1[$, la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} nx^n$.

Il s'agit d'une série entière de rayon de convergence égal à 1 (d'Alembert !), et l'on sait qu'une série entière peut être dérivée terme à terme sur son intervalle ouvert de convergence.

On obtient alors, pour $x \in]-1,1[$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} nx^n = x\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = x\left(\sum_{n=1}^{+\infty} x^n\right)' = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

b. Prouver que la famille $\left(\dfrac{i+j}{2^{i+j}}\right)_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable et prouver que sa somme vaut 8.

Fixons d'abord l'indice i ; la série $\sum \dfrac{i+j}{2^{i+j}}$ est alors trivialement convergente et sa somme vaut :

$$\sigma_i = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{i+j}{2^{i+j}} = \frac{i}{2^i}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{1}{2^j} + \frac{1}{2^i}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{j}{2^j} = 2\frac{i}{2^i} + \frac{1}{2^i}\frac{1/2}{(1-1/2)^2} = 2\frac{i}{2^i} + 2\frac{1}{2^i}.$$

Comme la série $\sum \sigma_i$ converge, la famille étudiée est sommable et sa somme vaut :

$$S = 2\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{i}{2^i} + 2\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{1}{2^i} = 2\frac{1/2}{(1-1/2)^2} + 2\times 2 = 8.$$

2. Soient X et Y deux variables aléatoires sur un même espace probabilisé à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que la loi conjointe du couple (X,Y) est donnée par :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ P(X=i, Y=j) = P\big[(X=i)\cap(Y=j)\big] = \frac{i+j}{2^{i+j+3}}.$$

a. Vérifier que la relation ci-dessus définit bien une loi conjointe.

D'après le cours, on définit bien ainsi une loi de probabilités si la famille $\left(\dfrac{i+j}{2^{i+j+3}}\right)$ est constituée de réels positifs (c'est le cas !), si elle est sommable (c'est encore le cas) et de somme 1 (bingo !).

b. Démontrer que les variables aléatoires X et Y suivent une même loi.

D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\forall i \in \mathbb{N},\ P(X=i) = \sum_{j=0}^{+\infty} P\Big[(X=i)\cap(Y=j)\Big] = \sum_{j=0}^{+\infty}\frac{i+j}{2^{i+j+3}} = \frac{\sigma_i}{8} = \frac{i+1}{2^{i+2}}.$$

Le calcul est le même pour déterminer la loi de Y ; X et Y suivent une même loi.

c. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

On n'a manifestement pas $P\Big[(X=i)\cap(Y=j)\Big] = P(X=i)\times P(Y=j)$, les variables X et Y ne sont pas indépendantes.

3. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes sur un même espace probabilisé suivant chacune une loi de Poisson de paramètres respectifs a et b.

a. Exprimer la probabilité $P(X=Y)$ sous forme d'une somme de série.

Par σ -additivité et indépendance, on a :

$$P(X=Y)=\sum_{n=0}^{+\infty}P\left[(X=n)\cap(Y=n)\right]=\sum_{n=0}^{+\infty}P(X=n)\times P(Y=n)=\mathrm{e}^{-a-b}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(ab)^n}{n!^2}$$

b. Faire de même pour la probabilité $P(|X-Y|=k)$ où k est un entier positif donné.

Pour $k=0$ *, le calcul a été effectué à la question précédente.*

Pour $k\neq 0$ *, les événements* $(X-Y=k)$ *et* $(Y-X=k)$ *sont incompatibles. Il vient donc :*

$$P(|X-Y|=k)=P(X-Y=k)+P(Y-X=k)$$

Mais $P(X-Y=k)=\sum_{n=0}^{+\infty}P(X=n+k)\times P(Y=n)=\mathrm{e}^{-a-b}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a^{n+k}b^k}{(n+k)!\,n!}$ *et le calcul de* $P(Y-X=k)$ *s'effectue de la même façon.*