Exercice 2

Un mobile se déplace sur les points à coordonnées entières d'un axe d'origine O. Au départ, le mobile est à l'origine (point d'abscisse 0) ; il se déplace selon la règle suivante : s'il est sur le point d'abscisse k à l'instant n, alors à l'instant $(n+1)$ il sera sur le point d'abscisse $(k+1)$ avec la probabilité $\dfrac{k+1}{k+2}$ et sur le point d'abscisse 0 avec la probabilité $\dfrac{1}{k+2}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note X_n l'abscisse du mobile à l'instant n. On a donc $X_0 = 0$. On *admet* que l'on définit ainsi pour tout n une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ convenable, et l'on pose $u_n = P(X_n = 0)$.

9. **a.** Donner la loi de X_1.

Au départ, le mobile est au point d'abscisse 0 et soit il reste sur place avec une probabilité $1/2$, *soit il passe au point d'abscisse 1 avec une probabilité elle-aussi égale à* $1/2$. *On a donc* $X_1(\Omega) = [[0,1]]$ *et* $P(X_1 = 0) = P(X_1 = 1) = 1/2$.

b. Prouver par récurrence que pour tout entier n, $X_n(\Omega) = [[0,n]]$.

L'initialisation à été faite à la question précédente. Par ailleurs, si $X_n(\Omega) = [[0,n]]$, *c'est qu'à l'étape n le mobile peut occuper n'importe quelle position comprise entre 0 et n. Alors la loi du déplacement prouve qu'à l'étape* $n+1$, *le mobile peut occuper toutes les positions comprises entre 0 et* $n+1$, *et seulement elles. On a donc bien* $X_{n+1}(\Omega) = [[0, n+1]]$.

10. **a.** Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \forall\, k \in [[1,n]], P(X_n = k) = \dfrac{k}{k+1} P(X_{n-1} = k-1)$.

D'après la question précédente, la famille $\left((X_{n-1} = k)\right)_{k \in [[0,n-1]]}$ *constitue un système complet d'évènements. La formule des probabilités totales donne alors* $P(X_n = k) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} P_{X_{n-1}=i}(X_n = k) P(X_{n-1} = i)$. *Mais la règle de déplacement dit que* $P_{X_{n-1}=i}(X_n = k)$ *vaut 0 si* $i \neq k-1$ *et* $\dfrac{k}{k+1}$ *si* $i = k-1$, *d'où la formule demandée.*

b. En déduire que $\forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, k \in [[0,n]], P(X_n = k) = \dfrac{1}{k+1} u_{n-k}$.

Il s'agit juste d'effectuer un produit télescopique :

$$P(X_n = k) = \frac{k}{k+1} P(X_{n-1} = k-1) = \frac{k}{k+1} \times \frac{k-1}{k} P(X_{n-2} = k-2) = \ldots = \frac{k}{k+1} \times \frac{k-1}{k} \times \ldots \times \frac{1}{2} P(X_{n-k} = 0),$$

ce qui donne immédiatement le résultat voulu.

c. Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}, \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \frac{u_j}{n-j+1} = 1$.

La famille $\left((X_n = i)\right)_{i \in [[0,n]]}$ *constituant un système complet d'évènements, on a* $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} P(X_n = i) = 1$, *soit* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{u_{n-k}}{k+1} = 1$, *soit encore* $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} \frac{u_j}{n-j+1} = 1$ *par le changement d'indice* $j = n-k$.

d. Retrouver ainsi les valeurs de u_0 et de u_1, puis déterminer u_2 et u_3.

On obtient, grâce à la formule précédente et par le biais d'un calcul transcendantal sur des fractions rationnelles : $u_0 = 1$, $u_1 = \dfrac{1}{2}$, $u_2 = \dfrac{5}{12}$ *et* $u_3 = \dfrac{3}{8}$.

11. **a.** Montrer, en remarquant que la relation de la question **10.a.** peut s'écrire :

$$(k+1)P(X_n = k) = k\,P(X_{n-1} = k-1),$$

que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $E(X_n) - E(X_{n-1}) = u_n$.

$$\sum_{k=1}^{+\infty} kP(X_{n-1} = k-1) = \sum_{k=1}^{+\infty} (k-1)P(X_{n-1} = k-1) + \sum_{k=1}^{+\infty} P(X_{n-1} = k-1) = E(X_{n-1}) + 1.$$

De la même façon,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (k+1)P(X_n = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} kP(X_n = k) + \sum_{k=1}^{+\infty} P(X_n = k) = E(X_{n-1}) + 1 - P(X_n = 0),$$

d'où la formule demandée en sommant de $k = 1$ *à* $+\infty$ *la relation de la question* ***10.a.***.

b. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, une expression de $E(X_n)$ sous forme d'une somme mettant en jeu certains u_k.

Par sommation de la relation précédente, il vient (somme télescopique) $E(X_n) - E(X_0) = \sum_{k=1}^{n} u_k$. *Or* $E(X_0) = 0$.

c. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{j=0}^{n-1} \dfrac{u_j}{n-j}$ et en déduire que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{j=0}^{n-1} \dfrac{u_j}{(n-j)(n-j+1)}$.

En remplaçant n par $n-1$ *dans la formule* ***10.c.***, *il vient* $\sum_{j=0}^{n-1} \dfrac{u_j}{n-j} = 1$.

De même, $1 = \sum_{j=0}^{n} \dfrac{u_j}{n-j+1} = \sum_{j=0}^{n-1} \dfrac{u_j}{n-j+1} + u_n$ *et donc, par différence :*

$$u_n = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{u_j}{n-j} - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{u_j}{n-j+1} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{u_j}{(n-j)(n-j+1)}.$$

d. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n \geq \dfrac{1}{n+1}$. Déterminer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} E(X_n)$.

Pour $j = 0 \ldots n-1$, $\dfrac{1}{n-j+1} \geq \dfrac{1}{n+1}$ *donc* $u_n \geq \dfrac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n-1} \dfrac{u_j}{n-j} = \dfrac{1}{n+1}$. *La série à termes positifs* $\sum u_n$ *est donc divergente et ses sommes partielles tendent vers* $+\infty$. *Il en résulte que* $\lim\limits_{n} E(X_n) = +\infty$.

12. On note T l'instant auquel le mobile se retrouve pour la première fois à l'origine (sans compter son positionnement au départ), avec la convention que $T = 0$ si le mobile ne revient jamais en O. On admet que T est une variable aléatoire définie, elle aussi, sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

a. Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, exprimer l'évènement $(T = k)$ en fonctions d'évènements mettant en jeu certains des X_i.

Les règles de déplacement du solide prouvent que :

$$(T = k) = (X_1 = 1) \cap (X_2 = 2) \cap \ldots (X_{k-1} = k-1) \cap (X_k = 0).$$

b. Montrer que pour tout k de $\mathbb{N}^*$, $P(T=k)=\dfrac{1}{k(k+1)}$.

On applique alors la formule des probabilités composée. $P(T=k)$ vaut :

$$P(X_1=1)\times P_{X_1=1}(X_2=2)\times\ldots\times P_{(X_1=1)\cap(X_2=2)\cap\ldots(X_{k-2}=k-2)}(X_{k-1}=k-1)\times P_{(X_1=1)\cap(X_2=2)\cap\ldots(X_{k-1}=k-1)}(X_k=0)$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\ldots\times\frac{k-1}{k}\times\frac{1}{k+1}$$

$$=\frac{1}{k(k+1)}$$

c. Calculer $P(T=0)$. Interprétation ?

$$P(T=0)=1-P(T\neq 0)=1-P\Big(\bigcup_{n\geq 1}(T=n)\Big)=1-\sum_{n=1}^{+\infty}P(T=n)=1-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1-\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right]=0.$$

Il en résulte qu'il est quasi-certain (i.e. la probabilité vaut 1) que le mobile retourne à l'origine en un temps fini.

d. T possède-t-elle une variance ?

La série $\sum kP(T=k)$ n'est autre que la série harmonique $\sum\frac{1}{n+1}$, elle diverge : T n'a pas d'espérance, et encore moins de variance.