Exercice 4

Si X est une variable aléatoire réelle discrète admettant une espérance, on note $\mathrm{E}(X)$ cette espérance.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, et X une variable aléatoire discrète sur cet espace à valeurs dans $[-1,1]$. On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, *mutuellement indépendantes*, et toutes de même loi que X.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$S_n = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}.$$

On se propose de prouver que si X est centrée, c'est-à-dire si $\mathrm{E}(X) = 0$, alors la suite (S_n) converge presque sûrement vers 0 (c'est un cas particulier de la loi forte des grands nombres, dans le cas de variables aléatoires bornées).

1. Montrer que X possède une espérance.

Par hypothèse, $\left|X\right| \leq 1$. *La constante* 1 *possédant une espérance, il en va de même de* X (*théorème de comparaison*).

On suppose désormais que X est centrée.

2. Prouver que pour tout $\alpha > 0$:

$$P(|X| \geq \alpha) \leq \frac{\mathrm{E}(|X|)}{\alpha}.$$

L'inégalité de Markov affirme que si Y *est une variable aléatoire discrète possédant un moment d'ordre* n *et si* t *est un réel positif, alors :*

$$P(|Y| \geq t) \leq \frac{\mathrm{E}(|Y|^n)}{t^n}.$$

On applique cette inégalité à la variable aléatoire $|X|$ (*qui possède une espérance puisque* X *en possède une*) *et* $n = 1$.

3. Montrer que $\forall\, \varepsilon, t > 0$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$P(S_n \geq \varepsilon) = P(\mathrm{e}^{tnS_n} \geq \mathrm{e}^{tn\varepsilon}) \leq \frac{(\mathrm{E}(\mathrm{e}^{tX}))^n}{\mathrm{e}^{tn\varepsilon}}.$$

Par croissance de l'exponentielle et par multiplication par les réels positifs t *et* n, *on a l'égalité des évènements suivants :*

$$(S_n \geq \varepsilon) = (tnS_n \geq tn\varepsilon) = (\mathrm{e}^{tnS_n} \geq \mathrm{e}^{tn\varepsilon}).$$

On utilise alors l'inégalité de Markov (*on peut puisque la variable aléatoire* e^{tnS_n} *est bornée, donc possède une espérance*) *:*

$$P(S_n \geq \varepsilon) = P(\mathrm{e}^{tnS_n} \geq \mathrm{e}^{tn\varepsilon}) \leq \frac{\mathrm{E}(\mathrm{e}^{tnS_n})}{\mathrm{e}^{tn\varepsilon}}.$$

Mais $\mathrm{e}^{tnS_n} = \mathrm{e}^{t(X_1+\ldots+X_n)} = \mathrm{e}^{tX_1} \times \ldots \times \mathrm{e}^{tX_n}$ *et on sait que les variables aléatoires* X_k *étant mutuellement indépendantes, il en va de même des* e^{tX_k}. *Il vient donc, les* X_k *possédant toutes la même loi que* X *:*

$$\mathrm{E}(\mathrm{e}^{tnS_n}) = \mathrm{E}(\mathrm{e}^{t(X_1+\ldots+X_n)}) = \mathrm{E}(\mathrm{e}^{tX_1})\times\ldots\times\mathrm{E}(\mathrm{e}^{tX_n}) = \mathrm{E}(\mathrm{e}^{tX})^n .$$

4. Soit $a > 1$. On considère la fonction g_a définie par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ g_a(x) = \frac{1-x}{2}a^{-1} + \frac{1+x}{2}a - a^x .$$

a. Prouver que la fonction $g_a{}'$ est décroissante et en déduire que g_a est positive sur $[-1,1]$.

La fonction g_a étant combinaison linéaire de fonctions affines et d'exponentielle de base a, elle est évidemment deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ g_a{}'(x) = -\frac{1}{2}a^{-1} + \frac{1}{2}a - \ln a\, a^x$$
$$g_a{}''(x) = -(\ln a)^2 a^x \le 0.$$

Mais il est clair que $g_a(-1) = g_a(1) = 0$, et on est même en droit de se demander si ce n'est pas étudié pour ! On dispose alors de deux moyens pour conclure : dresser le tableau de variations de g_a pour parvenir à la conclusion demandée, ou bien utiliser les arguments que tout cela cache et dire que la fonction g_a est concave, son graphe est donc au-dessus de ses cordes (Rq : on n'a pas utilisé l'hypothèse $a > 1$, $a > 0$ suffit).

b. Prouver que pour tout $t > 0$ et pour tout $x \in [-1,1]$, on a :

$$\mathrm{e}^{tx} \le \frac{1-x}{2}\mathrm{e}^{-t} + \frac{1+x}{2}\mathrm{e}^{t} .$$

Pour $t > 0$, $a = \mathrm{e}^t > 1$. On utilise alors la question précédente :

$$g_{\mathrm{e}^t}(x) \ge 0,\ \textit{ou encore}\ \mathrm{e}^{tx} \le \frac{1-x}{2}\mathrm{e}^{-t} + \frac{1+x}{2}\mathrm{e}^{t} .$$

c. En déduire que pour tout $t > 0$, $\mathrm{E}(\mathrm{e}^{tX}) \le \operatorname{ch} t$.

L'inégalité précédente peut aussi s'écrire $\mathrm{e}^{tx} \le \operatorname{ch} t + x \operatorname{sh} t$. Alors, par linéarité et croissance de l'espérance, il vient :

$$\mathrm{E}(\mathrm{e}^{tX}) \le \operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t\, \mathrm{E}(X) = \operatorname{ch} t .$$

d. Montrer que pour tout entier *k* et tout réel *t*, on a :

$$\frac{t^{2k}}{(2k)!} \le \frac{1}{k!}\left(\frac{t^2}{2}\right)^k .$$

Pour tout entier k, il est clair que $(2k)! = k!(k+1)\ldots(2k-1)2k \ge k!\,2^k \underbrace{\frac{k+1}{2}\ldots\frac{2k}{2}}_{\ge 1} \ge k!\,2^k$.

L'inégalité demandée en découle clairement.

On somme maintenant ces inégalités et on utilise les développements en série entière de l'exponentielle et du cosinus hyperbolique. On obtient alors :

$$\operatorname{ch} t = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} \le \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}\left(\frac{t^2}{2}\right)^k = \mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}} .$$

e. En déduire que pout tout $t > 0$, on a :

$$\mathrm{E}(\mathrm{e}^{tX}) \le \frac{\mathrm{e}^{t^2}}{2} .$$

*On conclut finalement, grâce à la question **4.c**, que* $\mathrm{E}(\mathrm{e}^{tX}) \le \mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}}$.

5. Dans cette question, n désigne un élément de $\mathbb{N}^*$ et ε un réel strictement positif.

a. Déterminer le minimum sur $\mathbb{R}$ de la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-nt\varepsilon + n\frac{t^2}{2}}$.

La dérivée de la fonction considérée vaut $(-n\varepsilon + nt)\mathrm{e}^{-nt\varepsilon + n\frac{t^2}{2}}$*, elle est négative avant* ε *et positive après, la fonction atteint donc un minimum global en* ε *en lequel elle prend la valeur* $\mathrm{e}^{-n\frac{\varepsilon^2}{2}}$.

b. En déduire que :

$$P(|S_n| \geq \varepsilon) \leq 2\mathrm{e}^{-n\frac{\varepsilon^2}{2}}.$$

Grâce aux questions précédentes, on peut affirmer que :

$$P(S_n \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathrm{E}(\mathrm{e}^{tX})^n}{\mathrm{e}^{tn\varepsilon}} \leq \frac{\mathrm{e}^{n\frac{t^2}{2}}}{\mathrm{e}^{tn\varepsilon}} = \mathrm{e}^{n\frac{t^2}{2} - tn\varepsilon}.$$

Cette inégalité étant vraie pour tout t, elle est vraie pour le t réalisant le minimum de la fonction majorante. On a donc bien $P(S_n \geq \varepsilon) \leq \mathrm{e}^{-n\frac{\varepsilon^2}{2}}$

Mais en faisant exactement le même travail avec les variables aléatoires $-X_k$ *qui sont, elles-aussi, à valeurs dans* $[-1,1]$*, mutuellement indépendantes et centrées, on obtiendrait aussi l'inégalité :*

$$P(-S_n \geq \varepsilon) \leq \mathrm{e}^{-n\frac{\varepsilon^2}{2}}.$$

Finalement :

$$P(|S_n| \geq \varepsilon) = P(S_n \geq \varepsilon) + P(-S_n \geq \varepsilon) \leq 2\mathrm{e}^{-n\frac{\varepsilon^2}{2}}.$$

6. **a.** Prouver, pour tout $\varepsilon > 0$, la convergence de la série de terme général $P(|S_n| \geq \varepsilon)$.

La série $\sum \mathrm{e}^{-n\frac{\varepsilon^2}{2}}$ *est une série géométrique convergente, donc la série* $\sum P(|S_n| \geq \varepsilon)$ *converge aussi.*

b. On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\varepsilon > 0$:

$$B_n(\varepsilon) = \bigcup_{m \geq n} \left\{\omega \in \Omega \,/\, |S_m(\omega)| > \varepsilon\right\}.$$

Justifier que les $B_n(\varepsilon)$ sont des évènements, et que :

$$P\Big(\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} B_n(\varepsilon)\Big) = 0.$$

S_n *étant une variable aléatoire, les ensembles* $\left\{\omega \in \Omega \;/\; \left|S_m(\omega)\right| > \varepsilon\right\}$ *sont des évènements.* $B_n(\varepsilon)$ *apparaît donc comme une réunion dénombrable d'évènements, c'est un évènement.*

De plus :

$$P\big(B_n(\varepsilon)\big) \leq \sum_{m \geq n} P\big(\left\{\omega \in \Omega \;/\; |S_m(\omega)| > \varepsilon\right\}\big) = \sum_{m \geq n} P(|S_m| > \varepsilon) \;;$$

le majorant étant le reste d'une série convergente, il tend vers 0 *quand n tend vers l'infini. On vient donc de prouver que* $\lim_n P\big(B_n(\varepsilon)\big) = 0$*. Mais la suite* $\big(B_n(\varepsilon)\big)$ *est évidemment décroissante au sens de l'inclusion. Le théorème de la limite monotone permet alors d'affirmer que* $P\big(\bigcap_{n>0} B_n(\varepsilon)\big) = \lim_n P\big(B_n(\varepsilon)\big) = 0$.

c. On pose, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\Omega_k = \left\{ \omega \in \Omega \ / \ \exists\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, m \geq n,\ |S_m(\omega| \leq \frac{1}{k} \right\}.$$

Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, Ω_k est un évènement.

d. Écrire l'ensemble $A = \left\{ \omega \in \Omega \ / \ \lim\limits_{n \to +\infty} S_n(\omega) = 0 \right\}$ à l'aide des évènements Ω_k et en déduire que A est un évènement.

e. Prouver que :

$$P(A) = 1\,.$$

La suite (Ω_k) *est clairement décroissante au sens de l'inclusion, le théorème de la limite monotone donne donc* $P(A) = \lim\limits_{k} P(\Omega_k)$. *Mais en passant aux évènements contraires,* $P(\Omega_k) = 1 - P(\bigcap\limits_{n>0} B_n) = 1$, *d'où le résultat.*