I. La règle de Raabe-Duhamel

1. Soient (u_n) et (v_n) deux suites de réels strictement positifs telles que, pour n assez grand, on ait l'inégalité :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

a. Prouver l'existence d'une constante positive k telle que, pour n assez grand, on ait :

$$u_n \leq k v_n.$$

b. Que peut-on en déduire concernant les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$?

c. Donner une nouvelle preuve de la règle de d'Alembert utilisant ce principe.

2. Soit $\sum u_n$ une série à termes réels strictement positifs telle que l'on ait le développement limité suivant :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{a}{n} + \mathrm{o}(\frac{1}{n}) \quad (a \in \mathbb{R}).$$

a. Que peut-on dire de la série $\sum u_n$ si l'on suppose $a < 0$?

b. On pose $v_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$. Effectuer le développement limité à l'ordre 1 de $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ puis comparer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ suivant la valeur de α.

c. Prouver que la série $\sum u_n$ converge pour $\alpha > 1$ et diverge pour $\alpha < 1$.

d. Étudier la série $\sum \dfrac{(2n)!}{4^n (n!)^2}$ grâce à cette règle, puis en donner une étude directe.

3. Soit $\sum u_n$ une série à termes réels strictement positifs telle que l'on ait le développement limité suivant :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{1}{n} + v_n,$$

où $v_n = \mathrm{o}(\frac{1}{n})$ et $\sum v_n$ est une série convergente.

a. Prouver que l'on peut écrire $\ln u_n = -\ln n + \alpha_n$ où (α_n) est une suite convergente.

b. Conclure quant à la nature de la série $\sum u_n$

II. La règle d'Abel

4. Soit (u_n) une suite de nombres réels ou complexes, telle que la suite (S_n) de ses sommes partielles soit bornée, et (ε_n) une suite de réels positifs tendant vers zéro en décroissant. On veut prouver que la série $\sum \varepsilon_n u_n$ est convergente (résultat connu sous le nom de « règle d'Abel »).

a. Prouver que la série $\sum (\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}) S_k$ est convergente.

b. En écrivant, $u_k = S_k - S_{k-1}$ pour $k \geq 1$, prouver que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k u_k = \varepsilon_n S_n - \varepsilon_1 S_0 + \sum_{k=1}^{n-1} (\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}) S_k$.

c. Conclure.

5. Applications

a. Donner une nouvelle démonstration du théorème des séries alternées utilisant la règle d'Abel.

b. Si $\sum a_n$ est une série réelle ou complexe convergente, prouver la convergence de $\sum \frac{a_n}{n}$.

III. Convergence et convergence absolue de $\sum \frac{\sin kx}{k^\alpha}$

Soit x un réel. On étudie la série $\sum \frac{\sin kx}{k^\alpha}$. Par périodicité et imparité, on se restreindra à x dans l'intervalle $[0,\pi]$ et on écartera les valeurs triviales $x = 0$ et $x = \pi$.

6. Prouver que la suite $(\sin kx)$ ne tend pas vers zéro.

7. Pour quelles valeurs du paramètre α peut-on affirmer sans problème :

i. la convergence absolue de la série étudiée ?

ii. sa divergence ?

8. On suppose ici $0 < \alpha \leq 1$.

a. Calculer, pour n entier, la somme $\sum_{k=1}^{n} \sin kx$. En déduire la convergence de la série $\sum \frac{\sin kx}{k^\alpha}$.

b. On désire prouver que cette série ne converge pas absolument. Pour cela, justifier la convergence de la série $\sum \frac{\cos 2kx}{k^\alpha}$, et en déduire la divergence de la série $\sum \frac{\sin^2 kx}{k^\alpha}$. Conclure.

IV. Un exemple de groupement de termes

On se propose ici d'étudier la convergence de la série $\sum \frac{\cos 2k\pi/3}{k}$ de façon élémentaire, c'est-à-dire sans employer la règle d'Abel. L'idée pour cela est de regrouper les termes de cette série trois par trois. On noter (σ_n) la suite des sommes partielles de cette série.

9. Pour n entier positif, on pose $p_n = \sum_{k=3n+1}^{3n+3} \frac{\cos 2k\pi/3}{k}$. Étudier la série de terme général p_n.

10. **a.** En déduire la convergence de la suite extraite (σ_{3n}).

b. Que peut-on dire des suites extraites (σ_{3n+1}) et (σ_{3n+2}) ?

c. Conclure.

V. Complément pour 5/2

Cette partie, parfaitement indépendante de ce qui précède, est une espèce de fourre-tout de résultats sans lien entre eux mais sur lesquels j'avais envie de vous faire réfléchir.

11. Soit $\sum u_n$ une série convergente à termes réels strictement positifs. Montrer qu'il existe une suite (a_n) de réels positifs telle que la suite (a_n) tend vers l'infini, et la série $\sum a_n u_n$ est convergente.

(<u>indication</u> : on pourra, en notant R_n le reste d'ordre n de la série $\sum u_n$, utiliser la suite (a_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{1}{\sqrt{R_{n-1}} + \sqrt{R_n}} \;)$$

12. Soit $\sum u_n$ une série divergente à termes réels strictement positifs. Montrer, de manière analogue, qu'il existe une suite (a_n) de réels positifs, tendant vers zéro, telle que la série $\sum a_n u_n$ soit divergente.

13. Quelles sont les significations pratiques des résultats des questions **11.** et **12.** ?

14. **a.** Soit une suite $a = (a_n)$ de réels strictement positifs, supposée majorée. On considère l'application N_a définie sur S (espace vectoriel des suites réelles (u_n) telles que la série $\sum u_n$ est absolument convergente) par :

$$\text{si } u = (u_n),\; N_a(u) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \left|u_k\right| .$$

Prouver que N_a est une norme sur S.

b. Pour $a = (a_n) = (\dfrac{n+1}{n+2})$ et $b = (b_n) = (\dfrac{1}{n!})$, les deux normes N_a et N_b sont-elles équivalentes ?

c. Donner une condition suffisante sur la suite a pour que la norme N_a soit équivalente à la norme N_∞.

15. **a.** Soit (x_n) une suite décroissante de réels positifs, telle que la série $\sum x_n$ converge. Prouver que la suite (nx_n) tend vers 0 (on pourra minorer $\displaystyle\sum_{k=[n/2]}^{n} x_k$).

Peut-on se passer de l'hypothèse de décroissance ?

b. On se donne une suite (u_n) tendant vers 0 en décroissant, telle que la série $\sum u_n$ diverge, et on pose, pour tout entier non nul n :

$$v_n = \inf\left\{\frac{1}{n}, x_n\right\}.$$

Prouver que la suite (v_n) décroît, puis que la série $\sum v_n$ diverge.

c. Plus généralement, on se donne deux suites (u_n) et (v_n), tendant vers 0 en décroissant, telles que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent, et on pose, pour tout entier non nul n :

$$w_n = \inf\left\{u_n, v_n\right\}.$$

Peut-on affirmer la divergence de la série $\sum w_n$?