Normes n_p et inégalités de Hölder

1. Soit p un entier non nul quelconque. Pour $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose :

$$N_p((x_1, \dots, x_n)) = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p} \ .$$

a. Prouver que l'application $x \mapsto x^p$ est convexe sur $\mathbb{R}^+$.

b. Soient X et Y deux vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^n$ tels que $N_p(X) + N_p(Y) = 1$.

En écrivant $a + b = N_p(X)\dfrac{a}{N_p(X)} + N_p(Y)\dfrac{b}{N_p(Y)}$, prouver pour tous réels positifs a et b l'inégalité :

$$(a+b)^p \leq N_p(X)\frac{a^p}{N_p(X)^p} + N_p(Y)\frac{b^p}{N_p(Y)^p} \, .$$

En déduire que $N_p(X+Y) \leq 1$.

c. Prouver que N_p définit une norme sur $\mathbb{R}^n$.

d. Déterminer, pour X fixé dans $\mathbb{R}^n$, la limite de la suite $\left(N_p(X)\right)_p$.

2. Soit E l'espace des fonctions numériques continues sur $[a,b]$. Pour $f \in E$ et $p \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$n_p(f) = \sqrt[p]{\int_a^b |f(t)|^p \, \mathrm{d}t} \, .$$

a. Prouver que l'application n_p ainsi définie est une norme sur E (on utilisera le résultat de la question **1.**).

On fixe désormais un élément non nul f de E et l'on cherche à déterminer la limite de la suite $\left(n_p(f)\right)$.

Soit $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < n_\infty(f)$, et c un point de $[a,b]$ en lequel $|f|$ atteint son maximum. On supposera (pour fixer les idées) que c ne vaut ni a ni b (dans le cas contraire, la preuve s'adapte sans difficulté).

b. Justifier l'existence de c.

c. Prouver l'existence d'un réel $\alpha > 0$ tel que :

$$\sqrt[p]{2\alpha}\left(n_\infty(f) - \varepsilon\right) \leq n_p(f) \leq \sqrt[p]{b-a} \ n_\infty(f) \, .$$

d. Conclure soigneusement.

3. Soient p et q deux entiers non nuls tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. On souhaite démontrer l'inégalité de Hölder qui affirme que si f et g sont deux fonctions numériques continues (non nulles sinon c'est trivial !) sur $[0,1]$, alors :

$$\int_0^1 |fg| \leq n_p(f)\, n_q(g) \, .$$

a. Prouver que si u et v sont deux réels positifs, alors :

$$uv \leq \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q} \, .$$

b. Prouver l'inégalité de Hölder dans le cas particulier où $n_p(f) = n_q(g) = 1$.

c. La prouver dans le cas général en se ramenant au cas précédent.