Pour x réel élément de $]-1,1[$, et n entier naturel non nul, on pose :

$$u_n(x) = \ln(1+x^n)\,.$$

Étude sur $[0,1[$ de la série de fonctions $\sum u_n$

1. **a.** Prouver, pour tout réel positif u, les inégalités : $0 \leq \ln(1+u) \leq u$.

La minoration est triviale. Pour la majoration, on a le choix entre l'étude de la fonction $u \mapsto u - \ln(1+u)$ *ou l'invocation d'une inégalité de concavité de* $\ln(1+u)$ *dont le graphe est sous sa tangente à l'origine.*

b. En déduire que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $[0,1[$, et que cette convergence est uniforme sur tout intervalle de la forme $[0,a]$ avec $0 \leq a < 1$.

La majoration $0 \leq \ln(1+x^n) \leq x^n$ *prouve à l'évidence la convergence de la série* $\sum u_n(x)$ *pour* $x \in [0,1[$ *puisque la série majorante est géométrique de raison x. De plus, pour* $x \in [0,a]$, $0 \leq u_n(x) \leq a^n$ *qui est le terme général d'une série convergente indépendadnte de x. On a ainsi prouvé la convergence normale, donc uniforme, de la série de fonctions* $\sum u_n$ sur $[0,a]$.

On ne dira plus désormais que la convergence normale entraine la convergence uniforme…

On pose désormais, pour x réel élément de $[0,1[$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1+x^n)$.

2. **a.** Prouver que la fonction f ainsi définie est continue sur $[0,1[$.

Les fonctions u_n *que l'on somme sont continues sur* $[0,a]$, *segment sur lequel la série de fonctions* $\sum u_n$ *converge uniformément. La fonction f est donc continue sur* $[0,a]$ *et, cela étant vrai pour tout* $a \in [0,1[$, *f est continue sur* $[0,1[$.

b. Calculer $f(0)$, prouver que f est croissante sur $[0,1[$ et que $\forall\, x \in [0,1[,\ f(x) \leq \dfrac{x}{1-x}$.

$f(0) = 0$ *puisque c'est la somme de la série nulle. Chaque fonction* u_k *étant croissante sur* $[0,1[$, *on peut écrire, pour* $0 \leq x \leq y < 1$ *et* $n \in \mathbb{N}^*$: $\sum_{k=1}^{n} u_k(x) \leq \sum_{k=1}^{n} u_k(y)$. *Il reste à faire tendre n vers l'infini pour obtenir* $f(x) \leq f(y)$. ***Le saviez-vous ?*** *Il est possible de prouver qu'une fonction est croissante sans pour autant la dériver !!! Enfin,* $\forall\, x \in [0,1[,\ f(x) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} x^n = \dfrac{x}{1-x}$

b. Prouver que pour tout réel u élément de $[0,1[$, on a l'inégalité : $\ln(1+u) \geq \dfrac{u}{2}$.

Il y a juste à étudier la différence $u \mapsto \ln(1+u) - \dfrac{u}{2}$. *On remarquera que l'équivalent* $\ln(1+u) \underset{0}{\sim} u$ *prouve que l'inégalité demandée est vraie au voisinage de 0 mais ne dit nullement que ce voisinage s'étend à* $[0,1[$.

c. En déduire une minoration de $f(x)$ par une fonction simple (ne comportant plus de signe Σ), puis la limite de f en 1^- .

*Il résulte de la question **2.b.** que* $\forall x \in [0,1[,\ f(x) \geq \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} x^n = \dfrac{1}{2}\dfrac{x}{1-x} \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} +\infty$.

3. Prouver que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1[$, et déterminer sa dérivée sur cet intervalle.

Chaque fonction u_k *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $[0,1[$ *, intervalle sur lequel la série de fonctions* $\sum u_k$ *converge simplement. Soit alors* $[0,a]$ *un segment inclus dans* $[0,1[$ *. Pour* $x \in [0,a]$ *, on a :*

$$0 \leq u_n{}'(x) = \frac{nx^{n-1}}{1+x^n} \leq na^{n-1} .$$

Mais la série $\sum na^{n-1}$ *est convergente (par d'Alembert ou bien en majorant* na^{n-1} *par* $1/n^2$ *pour n assez grand). La série dérivée converge donc uniformément sur tout segment inclus dans* $[0,1[$ *, ce qui permet de conclure que f est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $[0,1[$ *et que l'on peut la dériver terme à terme sur cet intervalle.*

4. On fixe un réel x de l'intervalle $[0,1[$ et l'on pose, pour $t \in \mathbb{R}^+$, $g(t) = \ln(1+x^t)$. Par ailleurs, on définit une fonction h sur $]0,1]$ par $h(u) = \dfrac{\ln(1+u)}{u}$.

a. Prouver que h se prolonge en une fonction continue sur $[0,1]$.

Il est infiniment classique que $\lim\limits_{u\to 0} h(u) = 1$.

$$\textit{On posera désormais } \lambda = \int_0^1 h(u)\mathrm{d}u = \int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u}\mathrm{d}u .$$

b. Étudier la monotonie de la fonction g et en déduire, pour $N \in \mathbb{N}^*$, l'encadrement :

$$\int_1^{N+1} \ln(1+x^t)\mathrm{d}t \leq \sum_{n=1}^{N} u_n(x) \leq \int_0^N \ln(1+x^t)\mathrm{d}t .$$

La fonction g est trivialement décroissante puisque $0 \leq x < 1$ *et, une fois encore, pas besoin de la dériver pour s'en convaincre ! On fait alors un beau dessin et on obtient l'encadrement demandé par une hyper-classique comparaison avec une intégrale.*

c. Grâce au changement de variable $u = x^t$ dans les intégrales précédentes, en déduire l'encadrement :

$$\frac{-1}{\ln x}\int_0^x h(u)\mathrm{d}u \leq f(x) \leq \frac{-1}{\ln x}\int_0^1 h(u)\mathrm{d}u .$$

$$\int_0^N \ln(1+x^t)\mathrm{d}t \underset{u=x^t}{=} \int_1^{x^N} \ln(1+u)\frac{\mathrm{d}u}{u\ln x} \ \textit{ et } \int_1^{N+1} \ln(1+x^t)\mathrm{d}t \underset{u=x^t}{=} \int_x^{x^{N+1}} \ln(1+u)\frac{\mathrm{d}u}{u\ln x} .$$

On remplace dans l'inégalité de la question précédente et on fait tendre N vers l'infini pour obtenir l'inégalité demandée.

d. Donner un équivalent simple de $f(x)$ au voisinage de 1^- .

Par continuité des intégrales fonctions de leur borne supérieure, on sait que $\int_0^x h(u)\mathrm{d}u \underset{x\to1^-}{\to} \int_0^1 h(u)\mathrm{d}u$. *On en déduit que* $f(x) \underset{1^-}{\sim} \frac{-\lambda}{\ln x} \underset{1^-}{\sim} \frac{\lambda}{1-x}$.

Étude sur $]-1,0[$ de la série de fonctions $\sum u_n$

5. Prouver que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $]-1,0[$.

Pour $x \in]-1,0]$, $\ln(1+x^n) \sim x^n \le 0$ *ce qui assure la convergence de la série* $\sum u_n(x)$.

On pose désormais, pour x réel élément de $]-1,0[$, $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1+x^n)$ et $h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \ln(1+x^{2n+1})$.

6. **a.** Prouver que pour tout x de $]-1,0[$, on a $g(x) = h(x) + f(x^2)$.

Ultra dur !!! On casse $g(x)$ *en la somme des deux séries convergentes de ses termes pairs et impairs :*

$$g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1+x^n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1+x^{2n}) + \sum_{n=0}^{+\infty} \ln(1+x^{2n+1}) = f(x^2) + h(x).$$

b. Prouver que la série de fonctions définissant $h(x)$ converge normalement sur tout intervalle de la forme $]-a,0]$ avec $a \in [0,1[$.

La seule difficulté réside dans le fait que les quantités manipulées étant négatives, il faut prendre soin dans les inégalités.

$$\ln(1+a^{2n+1}) \le \ln(1+x^{2n+1}) \le 0 \Rightarrow \left|\ln(1+x^{2n+1})\right| \le -\ln(1+a^{2n+1}) \sim -a^{2n+1}.$$

c. Prouver que g est continue sur $]-1,0[$.

La question précédente prouve la continuité de h sur tout intervalle de la forme $]-a,0]$ *avec* $a \in [0,1[$, *donc sur* $]-1,0[$. *La fonction f étant elle-même continue, la question* ***8.a.*** *donne sans douleur la continuité de g sur* $]-1,0[$.

Une autre représentation de $f(x)$

On fixe un réel $x \in [0,1[$ et l'on définit sur $\mathbb{N}^*$ une suite de fonctions (F_n) en posant :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, N \in \mathbb{N}^*,\ F_n(N) = \sum_{p=1}^{N} (-1)^{p-1} \frac{x^{np}}{p},$$

7. **a.** Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{N\to+\infty} F_n(N)$.

Comme $0 \le x^n < 1$, *la somme de la série* $\sum (-1)^{p-1} \frac{x^{np}}{p}$ *est* $\ln(1+x^n)$.

Par suite, $\lim_{N\to+\infty} F_n(N) = \ln(1+x^n)$.

b. Prouver que $\left|F_n(N)\right| \le -\ln(1-x^n)$.

$$\left|F_n(N)\right| = \left|\sum_{p=1}^{N}(-1)^{p-1}\,\frac{x^{np}}{p}\right| \leq \sum_{p=1}^{N}\frac{x^{np}}{p} \leq \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{x^{np}}{p} = -\ln(1-x^n)$$

c. En déduire la convergence normale (la variable étant N !) de la série de fonctions $\sum F_n$ sur $\mathbb{N}^*$.

Puisque $-\ln(1-x^n) \sim x^n \geq 0$ *, on a majoré* $\left|F_n(N)\right|$ *par le terme général d'une série convergente indépendadnte de N ; c'est la convergence normale demandée.*

8. Prouver que $f(x) = \displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{p-1}}{p}\,\frac{x^p}{1-x^p}$.

D'une part, il vient par sommation des limites et grâce à la convergence normale établie à la question précédente :

$$\lim_N \sum_{n=1}^{+\infty} F_n(N) = \sum_{n=1}^{+\infty}\lim_N F_n(N) = \sum_{n=1}^{+\infty}\ln(1+x^n) = f(x)\,.$$

Mais, d'autre part, puisque l'on somme un nombre <u>*fini*</u> *de séries convergentes, on a :*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}F_n(N) = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{p=1}^{N}(-1)^{p-1}\,\frac{x^{np}}{p} = \sum_{p=1}^{N}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{p-1}\,\frac{x^{np}}{p} = \sum_{p=1}^{N}\frac{(-1)^{p-1}}{p}\sum_{n=1}^{+\infty}x^{np} = \sum_{p=1}^{N}\frac{(-1)^{p-1}}{p}\,\frac{x^p}{1-x^p}\ .$$

On fait tendre N vers l'infini dans cette dernière égalité et le tour est joué.

Youpi et tralala.