On désigne par E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie égale à n ($n \geq 2$), et par Id_E l'application identité de E.

Un endomorphisme u de E est dit « nilpotent » si $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $u^k = 0$, 0 désignant l'endomorphisme nul de E. On définit alors « l'indice de nilpotence de u » comme le plus petit des entiers k tels que $u^k = 0$.

On définit de manière analogue une matrice carrée nilpotente et son indice de nilpotence.

Partie I

(*Exemple*)

On suppose dans cette partie que $n = 3$ et l'on fixe une base (i, j, k) de E. On considère l'endomorphisme u de E de matrice A dans la base (i, j, k) avec :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. **a.** Déterminer le rang de u, une base de son noyau et une base de son image.

b. Déterminer trois réels a, b, c tels que $\operatorname{Im} u = \left\{ xi + yj + zk \ / \ ax + by + cz = 0 \right\}$.

2. Prouver que u est nilpotent, et déterminer son indice de nilpotence.

3. Déterminer la matrice de u dans la base $(i + k, j, k)$.

4. On pose $B = I_3 + A$. On se propose de prouver de plusieurs manières que B est inversible, et pour chacune d'entre elles de déterminer B^{-1} par la méthode appropriée.

a. Prouver que B est inversible par la méthode du pivot, et donner B^{-1}.

b. Déterminer le noyau de $Id_E + u$, et ce en n'utilisant que le fait que u est nilpotent, en déduire que $Id_E + u$ est inversible et déterminer $(Id_E + u)^{-1}$ en résolvant l'équation $y = (Id_E + u)(x)$.

c. Calculer le déterminant de B, puis la valeur de B^{-1} *via* sa comatrice.

d. Utiliser la question **3.**.

5. **a.** Rappeler le développement limité à l'ordre 2 de $\sqrt{1+x}$ au voisinage de 0.

b. En déduire une matrice C *plausible* telle que $C^2 = B$, et vérifier que cette matrice convient.

6. Soit $\mathcal{A} = \left\{ M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}) \ / \ AM = MA \right\}$.

a. Prouver que $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, et déterminer la forme générale des éléments de $\mathcal{A}$.

b. Déterminer la dimension de $\mathcal{A}$, et prouver que (I_3, A, A^2) est une base de $\mathcal{A}$.

Partie II

(*Noyaux itérés*)

Soit v un endomorphisme de E. On pose, pour tout entier positif k :

$$N_k = \ker v^k \text{ et } I_k = \operatorname{Im} v^k .$$

7. **a.** Démontrer que la suite (N_k) est croissante au sens de l'inclusion.

b. Prouver l'existence d'un entier r tel que $N_r = N_{r+1}$.

c. Prouver que si p est un entier tel que $N_p = N_{p+1}$, alors $N_{p+1} = N_{p+2}$.

d. Concrètement, qu'a-t-on prouvé concernant la suite (N_k) ?

8. Énoncer des résultats analogues concernant les images I_k des v^k.

9. On note s le plus petit entier tel que $N_s = N_{s+1}$.

a. Prouver que $s \leq n$ (on pourra envisager deux cas suivant que v est inversible ou non).

b. Prouver que $I_s = I_{s+1}$.

c. Prouver que l'on a $E = \ker v^n \oplus \operatorname{Im} v^n$.

10. Pour k entier quelconque, on note $\delta_k = \dim I_k - \dim I_{k+1}$.

a. Établir l'existence d'un sous-espace vectoriel D_k de E tel que $I_k = I_{k+1} \oplus D_k$ et donner sa dimension.

b. Prouver que $I_{k+1} = I_{k+2} + v(D_k)$.

c. En déduire que la suite (δ_k) décroît. Qu'a-t-on prouvé ?

Partie III

(*Propriétés élémentaires des endomorphismes nilpotents*)

11. Soit u un endomorphisme non nul de E, que l'on suppose nilpotent. On note p son indice de nilpotence.

a. Prouver l'existence d'un vecteur a de E tel que $u^{p-1}(a) \neq 0$.

b. Prouver que la famille $(a, u(a), \dots, u^{p-1}(a))$ est libre.

c. En déduire que $p \leq n$, puis que $u^n = 0$.

d. Application

On désigne par n l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Prouver que n est nilpotent et déterminer son indice de nilpotence.

On suppose qu'il existe un endomorphisme r de $\mathbb{C}^3$ tel que $r^2 = n$. Prouver que r est nilpotent, et justifier que la considération de r^4 conduit à une contradiction.

12. Soit u un endomorphisme de E.

Prouver que s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure avec des zéros sur la diagonale, alors u est nilpotent.

13. *On admet dans cette question la réciproque du résultat précédent, à savoir que tout endomorphisme nilpotent possède, dans une bonne base, une matrice triangulaire supérieure avec des zéros sur la diagonale.*

Soient u et n deux endomorphismes de E tels que : n est nilpotent ; u et n commutent ($u \circ n = n \circ u$).

Il s'agit de prouver que $\det(u + n) = \det(u)$.

a. On suppose dans cette question que u est inversible.

Prouver que u^{-1} et n commutent, puis que $u^{-1} \circ n$ est nilpotent. En déduire la valeur de $\det(I + u^{-1} \circ n)$, puis le résultat énoncé.

b. On suppose dans cette question que u n'est pas inversible.

Prouver que le noyau de u est stable par n, et que si n' désigne la restriction de n au noyau de u, alors n' est nilpotent. En déduire l'existence d'un vecteur a non nul tel que $u(a) = n(a) = 0$, puis conclure.

Partie IV

(*Représentation matricielle des endomorphismes nilpotents en dimension 2 et 3*)

On fixe dans toute cette partie un endomorphisme u de E, que l'on suppose nilpotent et non nul.

14. On suppose dans cette question que $n = \dim E = 2$.

a. En considérant un vecteur a tel que $u(a) \neq 0$ et en utilisant les résultats de la question **III.11.b.**, prouver l'existence d'une base de E dans laquelle la matrice de u est :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

b. Que peut-on dire de deux matrices 2-2 nilpotentes et non nulles ?

15. On suppose dans cette question que $n = \dim E = 3$.

a. Prouver que le rang de u vaut 1 ou 2.

b. On suppose que u est de rang 1.

Donner les dimensions des noyaux de u et de u^3. En déduire que l'indice de nilpotence de u est égal à 2 (penser aux noyaux itérés).

Prouver alors l'existence d'une base de E dans laquelle la matrice de u est :

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

c. On suppose que u est de rang 2.

Prouver que $u^2 \neq 0$. En déduire l'existence d'une base de E dans laquelle la matrice de u est :

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

16. <u>Exemple</u>

On considère l'endomorphisme u de $\mathbb{C}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$U = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

a. Déterminer simplement, et à peu de frais, un scalaire λ tel que $v = u - \lambda I$ soit nilpotent.

b. Déterminer une base de $\mathbb{C}^3$ dans laquelle la matrice de v est l'une des deux matrices M ou N.

c. En déduire un mode de calcul de la matrice U^k pour k élément de $\mathbb{N}$.

Partie V

(*Commutateurs*)

17. On note Z_n le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ constitué des matrices de trace nulle.

a. Justifier brièvement que Z_n est un sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et en donner la dimension.

b. Prouver que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui est semblable à une matrice dont tous les éléments diagonaux sont nuls est dans Z_n.

c. Soit, réciproquement, une matrice M non nulle de trace nulle, et m l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ de matrice M dans la base canonique.

Prouver que m n'est pas une homothétie, puis qu'il existe une base $(e_1,\dots,e_n)$ de $\mathbb{C}^n$ dans laquelle la matrice de m possède un 0 en position 1-1.

Grâce à un raisonnement par récurrence, prouver alors l'existence d'une base $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$ de $\mathbb{C}^n$ dans laquelle la matrice de m ne possède que des zéros sur sa diagonale.

Toute matrice de trace nulle est donc semblable à une matrice dont tous les éléments diagonaux sont nuls (ces dernières matrices constituent un ensemble que l'on notera D_n dans la suite.)

d. Quelle est la dimension de D_n (dont il est trivial que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$!) ?

e. On note D la matrice diagonale $\operatorname{diag}(1,2,\dots,n)$.

Prouver que toute matrice de D_n peut s'écrire $MD-DM$.

f. En déduire que toute matrice de Z_n peut s'écrire $AB-BA$ où A et B sont deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Partie VI

(*Dilatations et transvections*)

On désigne par $\mathcal{GL}(E)$ le groupe linéaire de E.

u désigne un élément de $\mathcal{GL}(E)$ pour lequel l'ensemble des vecteurs de E invariants par u, autrement dit $\ker(u-I)$, est un hyperplan.

1. **a.** Écrire la matrice de u relativement à une base dont les $n-1$ premiers vecteurs sont dans $\ker(u-I)$. En déduire l'égalité : $\det(u)=\operatorname{tr}(u)-(n-1)$.

b. On note $a=\det(u)$. Prouver que si a est différent de 1, il existe un vecteur non nul x_0 tel que $u(x_0)=ax_0$. En déduire dans ce cas l'existence d'une base dans laquelle la matrice de u est diagonale.

On dit alors que u est une dilatation, et le nombre a, égal au déterminant de u, s'appelle le rapport de cette dilatation. Dans le cas contraire, c'est-à-dire quand le déterminant de u vaut 1, on dit que u est une transvection.

2. Montrer que l'application réciproque d'une dilatation est une dilatation dont on précisera le rapport, et que l'application réciproque d'une transvection est une transvection.

3. On désigne par H le noyau de $u-I$.

En utilisant encore une représentation matricielle, déterminer l'image de $u-I$, et montrer qu'elle est incluse dans H si, et seulement si, u est une transvection. Dans ce dernier cas, déterminer une base de E relativement à laquelle la matrice de u a tous ses éléments nuls, sauf ceux de la diagonale principale et celui de la $(n-1)^{\text{ième}}$ ligne et de la $n^{\text{ième}}$ colonne, lesquels sont égaux à 1.

4. Soit H un hyperplan de E, et soient x et y deux éléments distincts de E, tels que $x \notin H$ et $y - x \in H$. Montrer qu'il existe une transvection t et une seule telle que :

$$H = \ker(t - I) \quad \text{et} \quad y = t(x).$$