## EXERCICE

On se propose dans cet exercice de voir plusieurs utilisations de la densité du groupe linéaire $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ puis de voir comment, dans certains cas, il est possible de remplacer cet argument analytique en argument purement algébrique.

**1.** **a.** Prouver la densité de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ en choisissant une matrice $A$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et en utilisant une forme équivalente à $A$.

**b.** Prouver la densité de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ en choisissant une matrice $A$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et en prouvant que, pour $p$ assez grand, la matrice $A - \dfrac{1}{p} I_n$ est inversible.

**c.** L'une de ces deux preuves est supérieure à l'autre ; laquelle et pourquoi ?

**2.** Soient $A$ et $B$ deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui commutent, $B$ étant supposée nilpotente. On se propose de prouver que $\det(A+B) = \det A$.

**a.** Calculer $\det(I_n + B)$ (on pourra anticiper un résultat classique concernant les matrices nilpotentes).

**b.** Prouver le résultat énoncé en supposant $A$ inversible.

**c.** Prouver ce résultat dans le cas général.

**3.** Soient $A$ et $B$ deux matrices quelconques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On se propose de prouver que $AB$ et $BA$ ont le même polynôme caractéristique, c'est-à-dire (pour ceux qui auraient oublié de quoi il s'agit !) que :

$$\forall x \in \mathbb{C},\ \det(xI_n - AB) = \det(xI_n - BA).$$

Prouver ce résultat dans le cas où $A$ est supposée inversible puis dans le cas général.

**4.** Soient $A$, $B$, $C$ et $D$ quatre matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On définit par blocs une matrice de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ en posant :

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

Il s'agit de prouver que, si $C$ et $D$ commutent, alors $\det M = \det(AD - BC)$.

**a.** On suppose dans cette question que $D$ est inversible. En multipliant $M$ à droite par une bonne matrice définie par blocs, prouver le résultat énoncé.

**b.** Prouver le résultat dans le cas général.

**5.** On souhaite donner une preuve algébrique du résultat précédent (dont on conserve les notations). Quel intérêt me direz-vous ? Eh bien celui de ne pas avoir besoin de supposer que le corps de base est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ !

**a.** On pose, pour $x \in \mathbb{K}$, $f(x) = \det M_x$ où $M_x$ est la matrice suivante :

$$M_x = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D - xI_n \end{pmatrix}.$$

Pour quelles valeurs de $x$ a-t-on $\det M_x = \det\big(A(D - xI_n) - BC\big)$ ?

**b.** On suppose le corps $\mathbb{K}$ infini. Prouver que $\det M = \det(AD - BC)$.

**c.** Prouver le résultat en ne faisant plus cette hypothèse sur $\mathbb{K}$.

## PROBLÈME

*Étude d'une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$*

Pour toute matrice $A$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on désigne par $N(A)$ la plus grande somme des modules des termes de chaque colonne de $A$, c'est-à-dire :

$$\text{si } A=(a_{i,j}),\ N(A)=\sup_{1\le j\le n}\left(\sum_{i=1}^{n}\left|a_{i,j}\right|\right).$$

**6.** Prouver que $N$ définit une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

**7.** Prouver que pour toute matrice $A$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a $N(A^{\mathrm{T}})\le nN(A)$.
Existe-t-il des matrices non nulles vérifiant l'égalité ?

**8.** Prouver que si $A$ et $B$ sont dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a $N(AB)\le N(A)N(B)$.
Existe-t-il des matrices non nulles vérifiant l'égalité ?

**9.** En utilisant la formule donnant le déterminant, prouver que si $A=(a_{i,j})$ est dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a :

$$\left|\det(A)\right|\le\prod_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\left|a_{i,j}\right|\right).$$

En déduire que $\left|\det(A)\right|\le N(A)^n$.

**10.** On se propose de déterminer les matrices $A=(a_{i,j})$ réalisant l'égalité $\left|\det(A)\right|=\prod_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\left|a_{i,j}\right|\right)$.

**a.** Quelles sont les matrices $A$ non inversibles pour lesquelles cette égalité est vérifiée ?

**b.** On suppose ici que $A$ est inversible.

*i.* Prouver que tout produit de la forme $a_{i_1,1}a_{i_2,2}\dots a_{i_n,n}$ où l'un des indices $i_k$ apparaît au moins deux fois est nul.

*ii.* En déduire que chaque ligne de $A$ possède au plus un terme non nul.

*iii.* Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice inversible $A$ vérifie l'égalité proposée est que chaque ligne et chaque colonne de $A$ possèdent un et un seul terme non nul.

**11.** Prouver que si $A$ est inversible, on a $N(A^{-1})\le n\dfrac{N(A)^{n-1}}{\left|\det(A)\right|}$.

## PROBLÈME 3

On notera $\mathbb{N}_n$ l'ensemble des entiers compris entre 1 et $n$, $n$ désignant un entier naturel non nul.

$\mathcal{M}_n$ désigne l'algèbre des matrices carrées d'ordre $n$ à coefficients complexes, 0 la matrice nulle et $I_n$ la matrice identité de cette algèbre.

Pour $A\in\mathcal{M}_n$, on note $A=(a_{i,j})$ où $a_{i,j}$ désigne l'élément de $A$ situé à l'intersection de la ligne $i$ et de la colonne $j$, et $\mathrm{rg}(A)$ le rang de $A$.

Pour $i$ et $j$ éléments de $\mathbb{N}_n$, on note $E_{i,j}$ la matrice dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui situé à l'intersection de la ligne $i$ et de la colonne $j$, qui vaut 1. La famille $(E_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}_n^2}$ est une base de $\mathcal{M}_n$.

On appelle matrice de transvection toute matrice de la forme $I_n + \lambda E_{i,j}$ avec  complexe et $i$ différent de $j$.

**12.** **a.** Calculer les produits matriciels $E_{i,j}E_{k,l}$.

**b.** Calculer le déterminant d'une matrice de transvection.

**c.** Calculer le produit de deux matrices de transvection. En déduire l'inverse d'une telle matrice.

**13.** Soit $A$ un élément de $\mathcal{M}_n$.

**a.** Montrer que l'addition à une ligne de $A$ d'un vecteur proportionnel à une autre ligne peut se faire en multipliant $A$ à gauche par une matrice de transvection.

**b.** Établir un résultat analogue pour les colonnes.

**14.** Soit $A = (a_{i,j})$ un élément de $\mathcal{M}_n$. On suppose que la première ligne ou la première colonne de $A$ possède un élément non nul.

Montrer qu'il existe deux matrices $P$ et $Q$ de $\mathcal{M}_n$, toutes deux produits de matrices de transvection, telles que la matrice $B = PAQ$ ait son terme en position 1-1 égal à 1, et tous les autres termes de sa première ligne et de sa premières colonnes égaux à 0.

(On pourra successivement envisager les cas suivants :

*i.* $a_{1,1} = 1$ ;

*ii.* $\exists i > 1$ tel que $a_{i,1} \neq 0$ ou $a_{1,i} \neq 0$ ;

*iii.* $a_{1,1} \neq 1$ et $\forall i > 1,\ a_{i,1} = a_{1,i} = 0$ ).

**15.** Soit $A$ un élément non nul de $\mathcal{M}_n$, de rang égal à $r$.

Grâce à un raisonnement par récurrence, montrer qu'il existe deux matrices $P$ et $Q$ de $\mathcal{M}_n$, toutes deux produits de matrices de transvection, telles que la matrice $\mathcal{M}_n$ soit une matrice diagonale de coefficients $b_{i,j}$ vérifiant

*i.* $b_{i,i} = 1$ pour $1 \leq i < r$.

*ii.* $b_{i,i} = 0$ pour $i > r$.

*iii.* $b_{i,i} = d$ avec $d = 1$ si $r < n$ et $d = \det(A)$ si $r = n$.

**16.** Montrer que les matrices de transvection engendrent le groupe spécial linéaire d'ordre $n$.