

PROBLÈME I*(Algorithme de Leverrier)*

1. On se donne $2p + 2$ matrices P_0, P_1, \dots, P_p et Q_0, Q_1, \dots, Q_p . On suppose que pour tout réel x , on a :

$$Q_p x^p + Q_{p-1} x^{p-1} + \dots + Q_1 x + Q_0 = P_p x^p + P_{p-1} x^{p-1} + \dots + P_1 x + P_0.$$

Prouver alors que $P_i = Q_i$ pour tout entier i compris entre 0 et p .

2. On considère n fonctions V_1, \dots, V_n dérivables sur un même intervalle I de \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{C}^n , et la fonction Δ de I dans \mathbb{C} , définie par :

$$\Delta : x \mapsto \det_{\mathbb{C}}(V_1(x), \dots, V_n(x)).$$

Prouver que Δ est dérivable sur I et que pour tout x de I , on a :

$$\Delta'(x) = \sum_{i=1}^n \det_{\mathbb{C}}(V_1(x), \dots, V_i'(x), \dots, V_n(x)).$$

On fixe désormais une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et on note $P(X) = X^n + a_1 X^{n-1} + \dots + a_{n-1} X + a_n$ son polynôme caractéristique.

Pour x élément de \mathbb{R} , on note $C(x) = {}^t \text{com}(xI_n - A)$.

3. a. Prouver qu'il est possible d'écrire $C(x) = \sum_{j=0}^{n-1} x^j C_j$ où les C_j sont des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- b. Déterminer un système d'équations dont les matrices C_j sont solutions.
- c. En déduire une expression des C_j en fonctions des coefficients de P et des puissances de A . Comment s'appelle la dernière formule obtenue ? (ça a un léger côté magique, non ?)
4. a. Prouver que pour tout réel x , on a $\text{tr}(C(x)) = P'(x)$ (tr désigne la trace).
- b. En déduire la valeur de la trace des matrices C_j en fonction des coefficients de P .
- c. Quel algorithme pratique de détermination du polynôme caractéristique tout cela vous suggère-t-il ?

PROBLÈME II

Le but de ce problème est d'étudier le comportement de la suite des puissances d'un endomorphisme u d'un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie E non réduit à $\{0\}$

$\mathcal{L}(E)$ désignera l'algèbre des endomorphismes de E , et k la dimension de E .

E sera supposé muni d'une norme $\| \cdot \|$.

On fixe un élément u de $\mathcal{L}(E)$.

Partie I

5. a. Prouver que le réel $N(u) = \sup \{ \|u(x)\|, x \in E, \|x\| = 1 \}$ existe.

- b. Prouver que $\|u(x)\| \leq N(u)\|x\|$ pour tout x de E .
- c. Prouver que l'application $v \mapsto N(v)$ définit une norme sur $\mathcal{L}(E)$ (qui sera désormais muni de cette norme).
6. a. Soit (u_n) une suite d'éléments de $\mathcal{L}(E)$. Prouver que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :
- La suite (u_n) est convergente dans $\mathcal{L}(E)$.
 - Pour tout x de E , la suite $(u_n(x))$ converge dans E .
 - Étant donnée une base (e_1, \dots, e_k) de E , les k suites $(u_n(e_i))_n$, pour $1 \leq i \leq k$, convergent dans E .
- b. De manière analogue, donner sans démonstration deux énoncés équivalents à l'énoncé suivant :
- « la suite (u_n) est bornée dans $\mathcal{L}(E)$ ».
7. Soit u un endomorphisme de E . Prouver que pour que la suite de ses puissances soit bornée, il est nécessaire que toutes les valeurs propres de u soient de module inférieur ou égal à 1.
- Prouver par un exemple que cette condition nécessaire n'est pas suffisante.

Dans la suite de cette partie, u désigne un élément de $\mathcal{L}(E)$ tel que la suite (u^n) soit bornée.

8. a. Soit λ une valeur propre de module 1 de u (en supposant qu'il en existe une !). Soit x un élément du noyau de l'endomorphisme $(u - \lambda Id)^2$. Exprimer, pour n entier naturel non nul, le vecteur $u^n(x)$ en fonction de x et de $y = u(x) - \lambda x$. En déduire que x est dans le noyau de $u - \lambda Id$.

Prouver alors que E est somme directe de $\ker(u - \lambda Id)$ et de $\text{Im}(u - \lambda Id)$.

- b. En déduire qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice M de u s'écrit par blocs :

$$M = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

où D est une matrice diagonale — éventuellement de taille nulle — dont les éléments diagonaux sont tous de module 1, et A une matrice carrée dont les valeurs propres sont toutes de module strictement plus petit que 1.

(Indication : On pourra constater que $\text{Im}(u - \lambda Id)$ est stable par u , et procéder par récurrence.)

- c. λ désignant une valeur propre de module 1 de u , que peut-on dire de la dimension de l'espace propre correspondant ?

Partie II

9. a. Soit λ un complexe de module strictement plus petit que 1, et N une matrice nilpotente. Prouver que la suite des puissances de la matrice $J = \lambda I_k + N$ tend vers zéro.

b. Soit A une matrice carrée complexe dont toutes les valeurs propres sont de module strictement plus petit que 1. Démontrer, en utilisant le théorème de réduction spectrale, que la suite (A^n) tend vers zéro.

10. En déduire que la réciproque du résultat établi dans la question **I.4.b.** est exacte, à savoir que si un endomorphisme u de E possède dans une bonne base une matrice du type décrit dans cette question, alors la suite (u^n) de ses puissances est bornée.

11. Étant donné un endomorphisme u de E , déduire de tout ce qui précède une condition nécessaire et suffisante pour que la suite de ses puissances tende vers zéro.

Partie III

(Étude des puissances des matrices stochastiques)

On désigne par \mathcal{S}_n l'ensemble des matrices dites « stochastiques » de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire l'ensemble des matrices $M = [m_{i,j}]$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant les deux propriétés suivantes :

- les n^2 coefficients de la matrice M sont des réels positifs ;
- la somme des termes de chaque ligne de M vaut 1 : $\forall i \in [[1, n]], \sum_{j=1}^n m_{i,j} = 1$.

Ces matrices stochastiques jouent un rôle important en théorie des Probabilités.

Si $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ et si $A = [a_{i,j}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose :

$$\|X\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \text{ et } \|A\| = \max_{1 \leq i, j \leq n} |a_{i,j}|.$$

Par ailleurs, pour $A = [a_{i,j}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on pose :

$$\ker A = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) / AX = 0\} \text{ et } \operatorname{Im} A = \{Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) / \exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), AX = Y\}.$$

On fixe dans toute cette partie une matrice stochastique $M = [m_{i,j}] \in \mathcal{S}_n$, et l'on pose :

$$\forall k \in \mathbb{N}, C_k = \frac{I_n + M + M^2 + \dots + M^k}{k+1}.$$

- 10.**
- a.** Prouver que l'ensemble \mathcal{S}_n est stable pour le produit.
 - b.** Prouver que la limite d'une suite convergente de matrices stochastiques est elle-même une matrice stochastique.
Que peut-on en déduire concernant l'ensemble \mathcal{S}_n ?
 - c.** Démontrer que si la suite (M^k) converge vers une matrice L , alors L est une matrice de projection (on calculera de deux manières différentes la limite de la suite (M^{2k})).
 - d.** Démontrer que si la suite (M^k) converge vers L , alors la suite (C_k) converge elle-aussi vers L .
- 11.**
- a.** On désigne par J le vecteur colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont toutes les coordonnées valent 1.
Calculer MJ . Que peut-on en déduire ?
 - b.** Prouver que pour tout X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, on a $\|MX\|_\infty \leq \|X\|_\infty$.
En déduire que toutes les valeurs propres complexes de M sont de module inférieur ou égal à 1.
Quelles inégalités en déduit-on sur le déterminant et la trace de M ?
 - c.** On considère une matrice colonne Y appartenant à $\operatorname{Im}(M - I_n)$ que l'on écrit $Y = MX - X$ avec $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
Prouver que si $Y \in \ker(M - I_n)$, alors pour tout entier k on a $M^k X = kY + X$, puis que $\|Y\|_\infty \leq \frac{2}{k} \|X\|_\infty$.
 - d.** En déduire que Y est nul, puis que $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \ker(M - I_n) \oplus \operatorname{Im}(M - I_n)$.

Dans toute la suite de cette partie, on convient de noter P la matrice de la projection sur $\ker(M - I_n)$ parallèlement à $\text{Im}(M - I_n)$.

12. a. On décompose un élément X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ sur la somme $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \ker(M - I_n) \oplus \text{Im}(M - I_n)$ en posant

$$X = X_1 + X_2 \text{ avec } X_1 = PX \in \ker(M - I_n) \text{ et } X_2 = MZ - Z \in \text{Im}(M - I_n).$$

Donner l'expression de $C_k X$ et montrer que $\|C_k X - PX\|_\infty \leq \frac{2\|Z\|_\infty}{k}$.

- b. En déduire que $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \lim_{k \rightarrow \infty} C_k X = PX$, puis que $\lim_{k \rightarrow \infty} C_k = P$.

- c. En déduire la limite de la suite (M^k) quand celle-ci est convergente.