Partie I

On donne la matrice A de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. **a.** Déterminer (après avoir observé une particularité de A) le polynôme caractéristique P_A de A.

On reconnaît en P_A un déterminant triangulaire par blocs. On en déduit facilement que :

$$P_A = (X^2 - 5X + 6)(X^2 - 2X + 1) = (X-2)(X-3)(X-1)^2 .$$

b. A est-elle diagonalisable ?

On cherche l'espace propre associé à la valeur propre 1 :

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y + t = 0 \\ -x + z = 0 \\ 3z - 3t = 0 \\ 2z - 2t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z = t \\ y = -2x \end{cases}$$

L'espace propre cherché est donc une droite alors que 1 qui est valeur propre double : A n'est pas diagonalisable.

2. On note π_A le polynôme minimal de A, c'est à dire le polynôme unitaire de plus petit degré parmi les polynômes non nuls annulateurs de A.

Donner les deux valeurs possibles de π_A, puis sa valeur exacte en utilisant le résultat de la question **1.b.**.

On sait que le polynôme minimal a pour racines les valeurs propres de A, il ne peut donc valoir que $(X-2)(X-3)(X-1)$ ou $(X-2)(X-3)(X-1)^2$. Mais la première valeur est exclue car alors A possèderait un polynôme annulateur scindé-simple et serait donc diagonalisable. On en déduit que :

$$\pi_A = P_A = (X-2)(X-3)(X-1)^2$$

3. Prouver que A est inversible et donner A^{-1} en fonction de I_4, A, A^2 et A^3.

0 n'étant pas valeur propre de A, A est inversible. Le théorème de Cayley-Hamilton nous dit que $P_A(A) = 0$, c'est-à-dire que $A^4 - 7A^3 + 17A^2 - 17A + 6I_4 = 0$. On a donc $A(A^3 - 7A^2 + 17A - 17I_4) = -6I_4$, d'où :

$$A^{-1} = -\frac{A^3 - 7A^2 + 17A - 17I_4}{6} .$$

4. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ de matrice A dans la base canonique .

a. Prouver que l'on a $\mathbb{R}^4 = \ker(u - Id)^2 \oplus \ker(u - 2Id) \oplus \ker(u - 3Id)$.

Les polynômes $(X-1)^2$, $X-2$ et $X-3$ sont deux à deux premiers entre eux. Le lemme des noyaux conjugué au théorème de Cayley-Hamilton donne donc $\mathbb{R}^4 = \ker P_u(u) = \ker(u - Id)^2 \oplus \ker(u - 2Id) \oplus \ker(u - 3Id)$.

b. Quelle est la dimension de $\ker(u-Id)^2$? Justifier sans calcul que l'inclusion de $\ker(u-Id)$ dans $\ker(u-Id)^2$ est stricte.

Les valeurs propres 2 *et* 3 *sont simples, les espaces propres associés* $\ker(u-2Id)$ *et* $\ker(u-3Id)$ *sont donc des droites. Puisque* $\mathbb{R}^4 = \ker(u-Id)^2 \oplus \ker(u-2Id) \oplus \ker(u-3Id)$, *on en déduit que* $\ker(u-Id)^2$ *est de dimension* 2. *Mais on a vu que* $\ker(u-2Id)$ *était une droite, l'inclusion de* $\ker(u-2Id)$ *dans* $\ker(u-Id)^2$ *est donc stricte.*

c. En déduire que A est semblable à la matrice R suivante :

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Prenons pour e_3 *un vecteur propre associé à la valeur propre* 2 *et pour* e_4 *un vecteur propre associé à la valeur propre* 3. *Prenons* e_2 *dans* $\ker(u-Id)^2 - \ker(u-2Id)$ (*c'est possible d'après la question précédente*) *et posons* $e_1 = (u-Id)(e_2)$. *Alors* $u(e_2) = e_1 + e_2$ *et* $(u-Id)(e_1) = (u-Id)^2(e_2) = 0$: e_1 *est un vecteur propre associé à la valeur propre* 1. *Montrons que la famille* (e_1, e_2) *est libre :*

$$ae_1 + be_2 = 0 \Rightarrow (u-Id)(ae_1 + be_2) = 0 \Rightarrow b(u-Id)(e_2) = 0 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow ae_1 = 0 \Rightarrow a = 0 .$$

Finalement, la famille (e_1, e_2, e_3, e_4) *est une base puisque* $\ker(u-Id)^2$, $\ker(u-2Id)$ *et* $\ker(u-3Id)$ *sont supplémentaires, et la matrice de u dans cette base est R.*

5. On désigne par e une base dans laquelle la matrice de u est la matrice R précédente (*on ne demande pas d'expliciter une telle base e*).

a. Prouver que si v est un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ qui commute avec u, alors les sous-espaces $\ker(u-Id)^2$, $\ker(u-2Id)$ et $\ker(u-3Id)$ sont stables par v.

On va prouver plus généralement que si u et v commutent, les sous-espaces de la forme $\ker P(u)$ *sont stables par v ; cela répondra à la question. Notons que si v commute avec u, il commute avec les puissances de u, donc avec leurs combinaisons linéaires que sont les polynômes en u. Alors, si* $x \in \ker P(u)$:

$$P(u)\big(v(x)\big) = v\big(P(u)(x)\big) = v(0) = 0 \Rightarrow v(x) \in \ker P(u)$$

b. En déduire, toujours en supposant que v commute avec u, la forme nécessaire de la matrice de v dans la base e.

Puisque les sous-espaces $\operatorname{vect}(e_1, e_2) = \ker(u-Id)^2$, $\operatorname{vect}(e_3) = \ker(u-2Id)$ *et* $\operatorname{vect}(e_4) = \ker(u-3Id)$ *sont stables par u, la matrice de u dans la base e se doit d'être du type diagonale par blocs suivant :*

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f \end{pmatrix}.$$

Notons que cette forme n'est que nécessaire puisque, réciproquement, le bloc $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *se doit de commuter avec* $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c. Déterminer les matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec la matrice $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Soit $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$: $AJ=\begin{pmatrix}a & a+b\\ c & c+d\end{pmatrix}$ *et* $JA=\begin{pmatrix}a+c & b+d\\ c & d\end{pmatrix}$. *Donc* $JA=AJ \Leftrightarrow c=0$ *et* $a=d$ *: les matrices qui commutent avec J sont les matrices de la forme* $\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & a\end{pmatrix}$.

d. Donner, par l'intermédiaire de leur matrice dans la base e, *tous* les endomorphismes v de $\mathbb{R}^4$ qui commutent avec u. Quelle est la dimension de l'espace qu'ils constituent ?

Si l'on compile les résultats des questions précédentes, on parvient à la conclusion que v commute avec u si et seulement si sa matrice dans la base e est de la forme suivante :

$$\begin{pmatrix}a & b & 0 & 0\\ 0 & a & 0 & 0\\ 0 & 0 & e & 0\\ 0 & 0 & 0 & f\end{pmatrix}.$$

L'espace des endomorphismes qui commutent avec u est donc de dimension 4.

6. **a.** Soient M et N deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $M^2=N$. Prouver que M et N commutent.

S'il n'y a qu'un argument à donner, c'est celui de ***l'associativité*** *du produit matriciel. En effet :*

$$MN=M(MM)=(MM)M=NM.$$

b. Donner *toutes* les matrices K de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $K^2=J$ (la matrice J a été définie à la question **5.c.**).

D'après la question ***6.a.****, une racine carrée de la matrice J doit commuter avec J, elle est donc nécessairement de la forme* $\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & a\end{pmatrix}$. *Réciproquement :*

$$\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & a\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}a^2 & 2ab\\ 0 & a^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2=1\\ 2ab=1\end{cases}.$$

J possède donc exactement deux racines carrées opposées l'une de l'autre : $\pm\begin{pmatrix}1 & 1/2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

c. En déduire *toutes* les matrices M de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telles que $M^2=R$.

Si $M^2=R$*, M se doit de commuter avec R et donc être du type mentionné à la question* ***5.d****. Alors* $M^2=R$ *si et seulement si* $e^2=2$, $f^2=3$ *et* $\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & a\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. *On a trouvé toutes les racines carrées de R et il y en a huit.*

7. **a.** Prouver que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, la matrice R de la question **4.c.** est semblable à la matrice :

$$R_n=\begin{pmatrix}1 & 1/n & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 3\end{pmatrix}.$$

Reprenons les notations de la question ***4.c.*** *: on avait* $u(e_2)=e_1+e_2=\dfrac{1}{n}ne_1+e_2$ *et* $u(ne_1)=ne_1$. *La matrice de u dans la base* (ne_1,e_2,e_3,e_4) *est donc* R_n.

b. L'orbite de A pour la relation de similitude est-elle fermée ? (ou, en termes plus simples : la limite d'une suite convergente de matrices semblables à A est-elle semblable à A ?).

Par transitivité, la matrice A est semblable à R_n. Mais la suite (R_n) converge vers la matrice D suivante qui n'est pas semblable à A puisque A n'est pas diagonalisable :

$$R_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

L'orbite de A pour la relation de similitude n'est donc pas fermée.

Partie II

On se propose dans cette partie de décrire un algorithme permettant de trouver une valeur approchée de la valeur propre de plus grand module d'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

On fixe donc un élément A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, de valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ (chaque valeur propre étant répétée un nombre de fois égal à sa multiplicité dans le polynôme caractéristique P_A de A). On suppose en outre que l'on a

$$|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \ldots \leq |\lambda_{n-1}| < |\lambda_n|,$$

la valeur propre de plus grand module de A est donc *simple.*

8. **a.** Pourquoi A est-elle trigonalisable ?

Parce que c'est une matrice complexe et donc son polynôme caractéristique est scindé.

b. Exprimer le déterminant de A en fonction des λ_i.

C'est du cours : $\det A = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n$ *(ça se voit bien en trigonalisant A).*

9. **a.** Pour $p \in \mathbb{N}^*$, exprimer la trace t_p de la matrice A^p en fonction des λ_i.

Si la diagonale d'une forme trigonalisée de A comporte $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, une forme trigonalisée de A^p aura $\lambda_1^p, \lambda_2^p, \ldots, \lambda_n^p$ pour coefficients diagonaux. Par suite, $\operatorname{tr}(A^p) = \lambda_1^p + \ldots + \lambda_n^p$.

b. Déterminer la limite de la suite $(\frac{t_{p+1}}{t_p})$.

$\dfrac{t_{p+1}}{t_p} = \dfrac{\lambda_1^{p+1} + \ldots + \lambda_n^{p+1}}{\lambda_1^p + \ldots + \lambda_n^p} = \lambda_n \dfrac{a_1^{p+1} + \ldots + a_{n-1}^{p+1} + 1}{a_1^p + \ldots + a_{n-1}^p + 1}$ *où* $a_k = \dfrac{\lambda_k}{\lambda_n}$. *Les a_k étant, par hypothèse, strictement plus petits que 1 en module, les suites géométriques de raisons a_k tendent vers 0. On en déduit que la limite du quotient étudié est λ_n.*

c. Pourquoi le calcul de A^{2^p} n'est-il pas plus coûteux que celui de A^{p+1} ? En quoi cela permet-il d'améliorer le résultat de la question précédente ?

$A^{p+1} = A \times A^p$ *et* $A^{2^{p+1}} = (A^{2^p})^2$ *: ainsi, on passe de A^p à A^{p+1} par un simple produit de deux matrices, et il en va de même pour passer de A^{2^p} à $A^{2^{p+1}}$. Mais considérer A^{2^p} plutôt que A^p permet de faire grimper beaucoup plus vite l'exposant de A, et donc vraisemblablement d'accélérer la convergence de la suite* $(\frac{t_{p+1}}{t_p})$.

10. Soit le polynôme $P = X^3 - 3X^2 + 3$.

a. Prouver que P possède trois racines réelles a, b, c vérifiant $-1 < a < 0 < b < 2 < c$.

Il y a juste à étudier les variations de la fonction P et à mettre -1 , 0 et 2 dans le tableau de variations afin de mieux localiser les racines.

b. Soit C la matrice suivante :

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Déterminer le polynôme caractéristique de C.

On peut faire le calcul à la main, mais on peut aussi reconnaître en C une matrice compagnon. On trouve bien sûr $P_C = X^3 - 3X^2 + 3$.

c. Déterminer une valeur approchée de c.

Grâce à un logiciel de calcul matriciel trouvé sur Internet, j'ai pu calculer $c \approx \operatorname{tr}\dfrac{C^{17}}{C^{16}} = \dfrac{7230222}{2855493} \approx 2{,}532$ *ce qui est tout à fait correct puisque, tous calculs faits,* $P(2{,}532) \approx 0{,}0003$.

Partie III

On considère la matrice A_n de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ suivante :

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

A_n est donc la matrice dont tous les éléments sont nuls, sauf ceux de la diagonale qui sont égaux à 2, et ceux des sur et sous-diagonale qui sont égaux à -1 .

11. On note d_n le déterminant de A_n .

a. Donner une relation de récurrence simple entre d_n , d_{n-1} et d_{n-2} pour $n \geq 3$.

b. En déduire la valeur de d_n .

Cet exemple figure dans le cours, je ne le reprends donc pas ici.

12. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $X_\theta = \begin{bmatrix} \sin\theta \\ \sin 2\theta \\ \vdots \\ \sin n\theta \end{bmatrix}$.

a. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Prouver l'identité :

$$-\sin(k-1)\theta + 2\sin k\theta - \sin(k+1)\theta = 2(1-\cos\theta)\sin k\theta .$$

Fastoche pour ceux qui connaissent leurs formules de trigo, plus délicat pour les autres.

b. Exprimer simplement $A_n X_\theta$ grâce à la question précédente.

$$A_n X_\theta = A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \sin\theta \\ \sin 2\theta \\ \vdots \\ \sin(n-1)\theta \\ \sin n\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(1-\cos\theta)\sin\theta \\ 2(1-\cos\theta)\sin 2\theta \\ \vdots \\ 2(1-\cos\theta)\sin(n-1)\theta \\ -\sin(n-1)\theta + 2\sin n\theta \end{pmatrix}$$

c. Comment choisir θ pour que X_θ soit vecteur propre de A_n ?

On voit que X_θ *est « presque » un vecteur propre associé à la valeur propre* $2(1-\cos\theta)$ *, à cela près que la dernière coordonnée de* $A_n X_\theta$ *n'est pas tout à fait la bonne. Sauf si…* $\sin(n+1)\theta = 0$ *, auquel cas cette dernière coordonnée vaudra* $-\sin(n-1)\theta + 2\sin n\theta - \sin(n+1)\theta = 2(1-\cos\theta)\sin n\theta$ *: bingo !*

Ce choix étant fait, quelle est la valeur propre de A_n correspondante ?

Récapitulons : choisissons $\theta = \dfrac{k\pi}{n+1}$ *avec* $k \in [[1,n]]$ *; alors le vecteur* X_θ *est vecteur propre de* A_n *associé à la valeur propre* $2(1-\cos\theta)$ *.*

d. Prouver que A_n est diagonalisable.

Les $2(1-\cos\dfrac{k\pi}{n+1})$ *avec* $k \in [[1,n]]$ *sont deux à deux distincts puisque le cosinus est injectif sur* $[0,\pi]$ *: on a trouvé n valeurs propres distinctes pour* A_n *, on les a donc toutes et* A_n *est diagonalisable.*

Remarque : on savait a priori que A_n *est diagonalisable puisqu'elle est symétrique réelle.*

13. On note α_n la plus petite valeur propre de A_n , β_n la plus grande.

a. Déterminer α_n et β_n .

D'après ce qui précède, on a (par décroissance du cosinus sur $[0,\pi]$ *) :*

$$\alpha_n = 2(1-\cos\frac{\pi}{n+1}) \text{ et } \beta_n = 2(1-\cos\frac{n\pi}{n+1})$$

b. Donner un équivalent de $\gamma_n = \dfrac{\beta_n}{\alpha_n}$ quand n tend vers l'infini.

$$\gamma_n = \frac{\beta_n}{\alpha_n} = \frac{1-\cos\frac{n\pi}{n+1}}{1-\cos\frac{\pi}{n+1}} \sim \frac{2}{\frac{\pi^2}{2n^2}} = \frac{4n^2}{\pi^2}.$$

Le réel γ_n *est appelé le « conditionnement » de la matrice* A_n *. Le conditionnement d'une matrice donne une indication sur la façon dont cette matrice supporte les calculs approchés : s'il est grand, la matrice est sensible aux erreurs d'arrondis, on dit alors qu'elle est mal conditionnée. À titre d'exemple, envisageons les matrices suivantes :*

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 5 & 1 \\ 8 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 6 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 19 \\ 11 \\ 14 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

Il est facile de voir que la solution de l'équation $AX = B$ *est* $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Supposons que l'on remplace B par la matrice B' suivante, dont les coefficients sont très proches de ceux de B : $B' = \begin{pmatrix} 19{,}01 \\ 11{,}05 \\ 14{,}07 \\ 14{,}05 \end{pmatrix}$. Alors la solution de l'équation $AX' = B'$ est donnée par... $X' = \begin{pmatrix} -2{,}34 \\ 9{,}745 \\ -4{,}85 \\ -1{,}34 \end{pmatrix}$, matrice dont la ressemblance avec X ne saute pas aux yeux ! La matrice A, pourtant d'apparence simple, est très mal conditionnée.

*On déduit ainsi de la question **13.b.** que la matrice A_n est très mal conditionnée quand n devient grand. C'est d'autant plus ennuyeux que A_n intervient dans des calculs numériques reposant sur des approximations qui ne sont valables que pour n grand ! C'est l'objet de la question **14.** suivante.*

14. **a.** Soit f une fonction numérique de classe $\mathcal{C}^4$ sur $[0,1]$, $a \in]0,1[$ et h assez petit pour que $a+h$ et $a-h$ soient dans $[0,1]$. On note M_4 un majorant de $\left|f^{(4)}(t)\right|$ sur $[0,1]$. Prouver que :

$$\left|\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2} - f''(a)\right| \leq \frac{h^2}{12} M_4 .$$

Il suffit d'écrire deux inégalités de Taylor-Lagrange puis de les sommer, ce qui permet de tuer les termes de degrés impairs (on utilise au passage l'inégalité triangulaire, of course !) :

$$\left|f(a+h)-f(a)-hf'(a)-\frac{h^2}{2}f''(a)-\frac{h^3}{6}f'''(a)\right| \leq \frac{M_4}{24}h^4$$

$$\left|f(a-h)-f(a)+hf'(a)-\frac{h^2}{2}f''(a)+\frac{h^3}{6}f'''(a)\right| \leq \frac{M_4}{24}h^4$$

$$\Rightarrow \left|f(a+h)+f(a-h)-2f(a)-h^2f''(a)\right| \leq \frac{M_4}{12}h^4 .$$

Il ne reste plus qu'à diviser par h^2.

b. On se donne une fonction numérique g de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$, et l'on étudie la solution f de l'équation différentielle $y'' = -g$ satisfaisant à $f(0) = f(1) = 0$.

Prouver l'existence et l'unicité de f.

La fonction g étant continue, elle possède des primitives, lesquelles possèdent à leur tour des primitives. Les fonctions φ vérifiant $\varphi'' = -g$ existent donc et comme elles sont définies à une fonction affine près, les conditions $f(0) = f(1) = 0$ déterminent cette fonction affine de manière unique.

c. On pose, pour $n \geq 2$ et $k = 0,\ldots,n$, $y_k = f(\frac{k}{n})$ et $g_k = g(\frac{k}{n})$. Prouver, pour $k = 1,\ldots,n-1$, les inégalités :

$$\left|\frac{-y_{k-1}+2y_k-y_{k+1}}{1/n^2} - g_k\right| \leq \frac{1}{12n^2} m_2 .$$

*Il s'agit très exactement de l'inégalité obtenue à la question **14.a.** avec $h = \frac{1}{n}$ et en utilisant le fait que $f'' = -g$.*

d. En assimilant $-y_{k-1}+2y_k-y_{k+1}$ à $\frac{1}{n^2}g_k$, comment déterminer les y_k ?

Compte-tenu du fait que $y_0 = f(0) = f(1) = y_n = 0$, ces différentes équations s'écrivent :

$$\begin{cases} 2y_1 - y_2 = \dfrac{1}{n^2}\, g_1 \\ \qquad\vdots \\ -y_{k-1} + 2y_k - y_{k+1} = \dfrac{1}{n^2}\, g_k \\ \qquad\vdots \\ -y_{n-2} + 2y_{n-1} = \dfrac{1}{n^2}\, g_{n-1} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad A_{n-1}\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{n^2}\begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_{n-1} \end{pmatrix}$$

On trouve donc les y_k *en résolvant ce système linéaire : c'est là que ça tombe mal ! Les* g_k *sont des approximations qui nécessitent que n soit grand pour être correctes ; or, justement, la matrice* A_{n-1} *est mal conditionnée quand n est grand, ce qui rend la résolution d'un système* $A_{n-1}X = Y$ *sensible aux erreurs d'arrondis. Le monde est bien mal fait ma bonne dame !*