

PROBLÈME 1

Soit α un réel. Pour les valeurs du complexe z pour lesquelles la série $\sum \frac{z^n}{n^\alpha}$ est convergente, on posera :

$$S_\alpha(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n^\alpha}.$$

La restriction de S_α aux valeurs réelles x pour lesquelles la série $\sum \frac{x^n}{n^\alpha}$ converge sera notée f_α .

En cas de convergence de la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$, sa somme est notée $\zeta(\alpha)$.

Partie I
Généralités

1. a. Donner le rayon de convergence R commun à toutes les séries entières définissant les fonctions S_α .

La formule de d'Alembert donne évidemment $R = 1$.

- b. Discuter, suivant les valeurs de α , l'existence de $f_\alpha(R)$ et de $f_\alpha(-R)$. Récapituler en donnant, suivant les valeurs de α , le domaine de définition \mathcal{D}_α de f_α .

La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$, et la série de Riemann alternée

$\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 0$. Finalement, $\mathcal{D}_\alpha = [-1, 1]$ pour $\alpha > 1$, $[-1, 1[$ pour $0 < \alpha \leq 1$

et $] -1, 1[$ pour $\alpha \leq 0$.

- c. Donner, pour $\alpha > 0$, le signe de $f_\alpha(x)$ en différenciant les cas suivant le signe de x élément de $] -1, 1[$.

Si $x \geq 0$, $f_\alpha(x)$ est la somme d'une série à termes positifs, donc $f_\alpha(x) \geq 0$. Si $x < 0$, $f_\alpha(x)$ est la somme d'une série alternée dont la valeur absolue du terme général décroît dès les premiers termes ($\alpha > 0$), donc $f_\alpha(x)$ est du signe du premier terme de cette série (ici x), c'est-à-dire $f_\alpha(x) \leq 0$.

- d. Expliciter f_0 , f_{-1} et f_{-2} .

Pour $x \in] -1, 1[$, $f_0(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$, $f_{-1}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^n = x \left[\sum_{n=1}^{+\infty} x^n \right]' = \frac{x}{(1-x)^2}$ et enfin :

$$f_{-2}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^n = x^2 \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} + x \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = x^2 \left[\frac{1}{1-x} \right]'' + x \left[\frac{1}{1-x} \right]' = \frac{2x^2}{(1-x)^3} + \frac{x}{(1-x)^2}.$$

2. Étude de la limite à gauche en 1

- a. Soit α un réel pour lequel 1 est dans le domaine de définition de f_α . Prouver alors que f_α est continue en 1 (on citera avec précision le théorème utilisé).

On suppose donc ici $\alpha > 1$. Les fonctions $u_n : x \mapsto \frac{x^n}{n^\alpha}$ sont toutes continues en 1, et la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement (donc uniformément) sur $[0, 1]$ puisque $|u_n(x)| \leq \frac{1}{n^\alpha}$ pour tout x de $[0, 1]$. La fonction f_α est donc continue en 1.

b. Si $1 \notin \mathcal{D}_\alpha$, prouver que $\lim_{x \rightarrow 1^-} f_\alpha(x) = +\infty$ (on pourra dans ce cas comparer f_α à f_1).

Bien évidemment, si $\alpha \leq 1$, on a pour tout x de $[0, 1[$ $f_\alpha(x) \geq f_1(x) = -\ln(1-x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} +\infty$.

3. Donner une formule intégrale liant f_α et $f_{\alpha-1}$.

On sait qu'une série entière peut se dériver terme à terme sur son intervalle ouvert de convergence. En conséquence, pour tout x de $] -1, 1[$, on a $f_{\alpha-1}(x) = x f_\alpha'(x)$ soit, en intégrant et en tenant compte du fait que

$$f_\alpha(0) = 0, \quad f_\alpha(x) = \int_0^x \frac{f_{\alpha-1}(t)}{t} dt.$$

Partie II

Un logarithme complexe

On pose ici, pour z complexe, $S(z) = -S_1(-z) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}$.

4. Donner le rayon de convergence R de la série entière définissant S . Que vaut $\exp(S(x))$ pour x réel élément de l'intervalle $] -R, R[$?

La règle de d'Alembert donne encore une fois $R = 1$. On, reconnaît en $S(x)$ le développement en série entière de $\ln(1+x)$, donc $\exp(S(x)) = 1+x$ pour x dans $] -1, 1[$.

On se propose de prouver que cette dernière égalité reste valable pour z complexe, avec $|z| < R$. On fixe pour cela un complexe non nul z_0 de module strictement plus petit que R , et on considère la série entière de la variable réelle t suivante :

$$\sum (-1)^{n-1} \frac{(tz_0)^n}{n} = \sum (-1)^{n-1} \frac{z_0^n}{n} t^n.$$

On a donc, dès que sa somme g est définie, $g(t) = S(tz_0)$.

5. Quel est le rayon de convergence de la série entière définissant g ? Prouver que g est définie, dérivable sur $[0, 1]$. Que vaut $g'(t)$ pour t dans $[0, 1]$?

D'Alembert, encore lui, nous donne un rayon de convergence égal à $\frac{1}{|z_0|} > 1$ pour la série entière définissant g . la fonction g est donc définie et dérivable terme à terme sur $] -\frac{1}{|z_0|}, \frac{1}{|z_0|}[$ et donc a fortiori sur $[0, 1]$. La dérivation de $g(t)$ révèle une série géométrique et l'on trouve donc $g'(t) = \frac{z_0}{1+tz_0}$.

6. On pose ici $h(t) = \exp(g(t))$.

Prouver que h est dérivable sur $[0, 1]$ et que l'on y a $h'(t) = \frac{z_0}{1+tz_0} h(t)$.

L'argument selon lequel h est dérivable en tant que composée de fonctions dérivables est **faux** ! En effet l'exponentielle définissant h est une exponentielle complexe, ce n'est pas une fonction d'une variable réelle et le programme de MP ne donne donc pas de sens à la dérivée de cette exponentielle. En revanche, cette situation est

évoquée dans le cours de Dérivation dans lequel on prouve que dans ce type de situation, la dérivée se calcule bien comme on a envie de le faire. On trouve donc bien $h'(t) = \frac{z_0}{1+tz_0}h(t)$.

7. On pose, pour t dans $[0,1]$, $w(t) = \frac{h(t)}{1+tz_0}$.

a. Prouver que w est dérivable et calculer w' .

Ce calcul est immédiat et livre $w' = 0$.

b. En déduire que $\exp(S(z_0)) = 1 + z_0$, c'est-à-dire ce que l'on désirait prouver.

On en déduit immédiatement que la fonction w est constante, donc que $w(1) = w(0)$, soit enfin que $\exp(S(z_0)) = 1 + z_0$.

8. On choisit ici $z_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 + i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

a. Vérifier que $|z_0| < 1$. Quelles sont les valeurs possibles de $S(z_0)$?

On a immédiatement $|z_0| = \sqrt{2 - \sqrt{2}} < 1$, donc $\exp(S(z_0)) = 1 + z_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = \exp(i\frac{\pi}{4})$. On peut

donc affirmer l'existence d'un entier k tel que $S(z_0) = i(\frac{\pi}{4} + 2k\pi)$.

b. Prouver que $|S(z_0)| \leq 2$ et en déduire la valeur de $S(z_0)$.

$|S(z_0)| = \left| \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{z_0^n}{n} \right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|z_0|^n}{n} = -\ln(1 - |z_0|) \approx 1,44 \leq 2$. *La seule valeur qui convient pour $S(z_0)$*

est donc $S(z_0) = i\frac{\pi}{4}$.

PROBLÈME 2

Partie I

On désigne par φ une fonction continue de \mathbb{R} dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} , et on envisage l'équation différentielle :

$$(E) : y''(x) + \varphi(x)y(x) = 0.$$

On suppose dans cette partie que φ est paire et de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .

1. Montrer qu'une solution y de (E) est de classe \mathcal{C}^∞ et que la fonction $x \mapsto y(-x)$ est aussi une solution de (E).
Si y est une solution de (E), alors y est de classe \mathcal{C}^2 et $y'' = -qy$. La fonction q étant de classe \mathcal{C}^∞ , y'' est à son tour de classe \mathcal{C}^2 , y est donc de classe \mathcal{C}^4 . Par récurrence, on prouve alors facilement que y est de classe \mathcal{C}^∞ .

Posons $z(x) = y(-x)$. Alors $z'(x) = y''(-x) = -\varphi(-x)y(-x) = -\varphi(x)z(x)$: z est solution de (E).

2. a. Justifier l'existence et l'unicité de deux solutions de (E), notées f_0 et f_1 , vérifiant les conditions :

$$f_0(0) = 1 \quad ; \quad f_0'(0) = 0 \quad ; \quad f_1(0) = 0 \quad ; \quad f_1'(0) = 1.$$

Ce n'est pas autre chose que le théorème de Cauchy.

b. Prouver grâce à la question 1. que la fonction f_0 est paire et la fonction f_1 impaire.

Si l'on pose $g_0(x) = f_0(-x)$, alors g_0 est une solution de (E) qui prend même valeur et même dérivée que f_0 en 0. Par unicité, $f_0 = g_0$: f_0 est paire. On raisonne de même pour prouver l'imparité de f_1 .

3. On suppose que f_0 ne s'annule pas sur \mathbb{R} , et l'on pose $u = \frac{f_1}{f_0}$.

a. Montrer que la fonction u' ne s'annule pas, et exprimer $\frac{u''}{u'}$ en fonction de $\frac{f_0'}{f_0}$.

$$u' = \frac{f_1' f_0 - f_1 f_0'}{f_0^2} : \text{le numérateur n'est autre que le wronskien de } f_0 \text{ et de } f_1, \text{ il ne s'annule donc pas}$$

puisque ces deux solutions sont linéairement indépendantes (c'est clair vues les conditions qu'elles remplissent en 0). En dérivant u' , on trouve :

$$\begin{aligned} u'' &= \frac{(f_1'' f_0 + f_1' f_0' - f_1' f_0' - f_1 f_0'') f_0 - 2f_0' f_0 (f_1' f_0 - f_1 f_0')}{f_0^4} \\ &= \frac{(-\varphi f_1 f_0 + \varphi f_1 f_0) f_0 - 2f_0' f_0 (f_1' f_0 - f_1 f_0')}{f_0^4} \\ &= \frac{-2f_0' f_0 (f_1' f_0 - f_1 f_0')}{f_0^4}, \end{aligned}$$

$$d'où \frac{u''}{u'} = -2 \frac{f_0'}{f_0}.$$

b. En déduire qu'il existe une constante B , que l'on calculera, telle que $u' = \frac{B}{f_0^2}$.

On primitive l'égalité précédente et on obtient $\ln|u'| = -\frac{1}{2} \ln|f_0| + cte$, d'où $|u'| = \frac{a}{f_0^2}$ où a est une cons-

tante positive. Mais u' étant continue et ne s'annulant pas, elle est de signe constant. Il vient donc $u' = \frac{B}{f_0^2}$ avec

$B = \pm a$ suivant le signe de u' . Reste à évaluer en 0 pour obtenir $B = u'(0) = 1$.

c. On note u_0 la primitive de $\frac{1}{f_0^2}$ qui s'annule en 0. Exprimer f_1 en fonction de f_0 et de u_0 .

Comme $u(0) = 0$, il vient en intégrant l'égalité précédente $u = u_0$ et donc $f_1 = f_0 u_0$.

4. Dans cette question, $\varphi(x) = -(1+x^2)$ pour tout réel x .

a. Chercher une solution particulière de (E) sous la forme e^z où z est une fonction que l'on déterminera.

Si $y = e^z$, il vient $y'' = (z'' + z'^2)e^z$. On veut donc $y'' = (z'' + z'^2)e^z = (1+x^2)e^z$ et il est clair que

$z' = x$ convient : la fonction $x \mapsto e^{\frac{x^2}{2}}$ est solution de (E).

b. Résoudre complètement l'équation différentielle (on ne cherchera pas à calculer l'intégrale rencontrée).

On vient de trouver une solution de (E) qui ne s'annule pas, c'est tout ce qu'il faut pour utiliser la méthode de Lagrange. On pose donc $z = ye^{-\frac{x^2}{2}}$ et l'on calcule les dérivées de y en fonction de celles de z pour rem-

placer dans l'équation (E). Tous calculs faits (ils ne sont pas bien durs !), l'équation différentielle vérifiée par z

s'écrit : $2xz' + z'' = 0$, d'où l'on tire $z' = ae^{-x^2}$ puis $z = a \int_0^x e^{-t^2} dt + b$. Finalement, la solution générale de (E) est donc :

$$y = ae^{\frac{x^2}{2}} \int_0^x e^{-t^2} dt + be^{\frac{x^2}{2}}.$$

Partie II

On envisage dans cette partie l'équation différentielle suivante :

$$(E) : x^2 y'' + (x^2 + 1)y = 0.$$

5. a. Peut-on affirmer l'existence d'une solution S de (E) définie sur \mathbb{R}_+^* et vérifiant $S(1) = 0$, $S'(1) = 1$?

Oui, c'est le théorème de Cauchy appliqué à l'équation différentielle (E) présentée sous la forme

$$y'' + \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)y = 0.$$

b. Peut-on affirmer l'existence d'une solution T de (E) définie sur \mathbb{R} et vérifiant $T(0) = 0$, $T'(0) = 1$?

Non le théorème de Cauchy ne s'applique pas sur \mathbb{R} car la fonction $x \mapsto 1 + \frac{1}{x^2}$ n'y est pas continue.

6. Prouver que la seule solution de (E) développable en série entière autour de 0 est la fonction nulle.

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R \neq 0$, et $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour $x \in]-R, R[$. Alors g

est solution de (E) sur $] -R, R[$ si et seulement si :

$$\begin{aligned} \forall x \in]-R, R[, x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + (x^2 + 1) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n &= 0 \\ \Leftrightarrow \forall x \in]-R, R[, \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2} &= 0 \\ \Leftrightarrow \forall x \in]-R, R[, \sum_{n=0}^{+\infty} (n^2 - n + 1)a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2} &= 0 \\ \Leftrightarrow \forall x \in]-R, R[, \sum_{n=0}^{+\infty} (n^2 - n + 1)a_n x^n + \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n &= 0 \\ \Leftrightarrow \forall x \in]-R, R[, a_0 + a_1 x + \sum_{n=2}^{+\infty} ((n^2 - n + 1)a_n + a_{n-2})x^n &= 0 \\ \Leftrightarrow (\text{par unicité du développement en série entière}) : & \\ a_0 = 0, a_1 = 0 \text{ et } \forall n \geq 2 (n^2 - n + 1)a_n + a_{n-2} = 0 & \\ \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, a_n = 0. & \end{aligned}$$

On désigne désormais par S la solution de (E) définie sur \mathbb{R}_+^* vérifiant $S(1) = 0$ et $S'(1) = 1$.

7. On pose, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $E(x) = S'^2(x) + \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)S^2(x)$.

a. Prouver que la fonction E décroît sur \mathbb{R}_+^* .

Pour $x > 0$, on a $E'(x) = 2S'(x)S''(x) + 2\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)S'(x)S''(x) - \frac{2}{x^3}S^2(x) = -\frac{2}{x^3}S^2(x) < 0$.

b. En déduire que S est bornée sur $[1, +\infty[$.

Il vient donc, pour $x > 1$, $E(1) \geq E(x) = S'^2(x) + \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)S^2(x) \geq S^2(x)$: S est bornée sur $[1, +\infty[$.

8. f et g désignent ici deux fonctions numériques continues sur un même intervalle I de \mathbb{R} vérifiant $\forall x \in I, f(x) > g(x)$. On note u_1 et u_2 des solutions respectives des équations différentielles $(E_1) : y'' + f(x)y = 0$ et $(E_2) : y'' + g(x)y = 0$.

On suppose que x_1 et x_2 sont deux annulations consécutives de la fonction u_2 sur I , donc que l'on a $x_1 < x_2$, $u_2(x_1) = u_2(x_2) = 0$ et, pour fixer les idées, on supposera que $\forall x \in]x_1, x_2[, u_2(x) > 0$.

On suppose enfin que u_1 ne s'annule pas sur $J =]x_1, x_2[$.

Observons tout d'abord que les équations étant homogènes, l'opposée d'une solution est encore solution. Il n'y a donc aucune restriction à supposer que u_1 et u_2 sont à valeurs strictement positives sur $J =]x_1, x_2[$.

a. On définit sur I la fonction $D = u_1u_2' - u_1'u_2$. Étudier les variations de D sur J .

$D' = u_1'u_2' + u_1u_2'' - u_1''u_2 - u_1'u_2' = u_1u_2'' - u_1''u_2 = (f - g)u_1u_2$. D est donc strictement croissante sur $[x_1, x_2]$.

b. Trouver une impossibilité, et en déduire que u_1 s'annule sur J .

$D(x_1) = u_1(x_1)u_2'(x_1)$, or $u_1(x_1) \geq 0$ et $u_2'(x_1) \geq 0$ (la deuxième inégalité résulte de ce que u_2 étant positive sur $[x_1, x_2]$, on ne peut avoir $u_2'(x_1) < 0$ (dessin !). Bref, $D(x_1) \geq 0$. Les mêmes arguments prouvent que $D(x_2) \leq 0$. Or il est strictement interdit à une fonction de croître strictement d'un machin positif à un bidule négatif !

c. Prouver que si x et y sont deux annulations consécutives d'une solution non nulle v de (E_2) , toute solution de (E_1) s'annule entre x et y .

On vient de voir que la fonction u_1 ne peut rester de signe constant entre deux annulations consécutives de u_2 . Étant continue, elle doit s'annuler.