Une répartition 1 h 15 – 2 h 45 de votre temps me semblerait raisonnable.

EXERCICE

Dans tout cet exercice, on identifiera l'élément $x = (x_1, \dots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ à la matrice colonne $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. L'espace $\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique ; on a donc $(x|y) = X^{\mathrm{T}} Y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$. La norme euclidienne associée est notée $\| \ \|$. La base canonique de $\mathbb{R}^n$, qui est orthonormale pour ce produit scalaire, est notée $b = (e_1, \dots, e_n)$.

On note $\mathcal{B} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \ / \ \|x\| = 1 \right\}$ la boule unité de $\mathbb{R}^n$, et F l'application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall\, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n,\ F(X) = \sum_{i \neq j} x_i x_j \ .$$

Par exemple, pour $n = 3$, $F(X) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_2x_1 + x_3x_1 + x_3x_2 = 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3)$.

1. **a.** Rappeler l'inégalité de Cauchy-Schwarz ainsi que son cas d'égalité.

b. Que donne-t-elle si on l'applique aux vecteurs $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$?

2. **a.** Exprimer $F(X)$ à l'aide de $S_1(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i$ et de $S_2(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$.

b. Prouver que F possède un maximum sur $\mathcal{B}$ que l'on notera M.

c. Montrer en utilisant la question **1.** que $M = n - 1$.

d. Déterminer tous les X de $\mathbb{R}^n$ tels que $F(X) = M$.

3. Pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ éléments de $\mathbb{R}^n$, on pose :

$$\varphi(X, Y) = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} (x_i y_j + x_j y_i).$$

a. Expliciter $\varphi(X, Y)$ pour $n = 3$.

b. On revient à n quelconque.

Exprimer $F(X)$ à l'aide de φ pour $X \in \mathbb{R}^n$.

c. Expliciter la matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont le terme en position i-j est $\varphi(e_i, e_j)$.

d. Justifier l'existence d'une base orthonormale $u=(u_1,\dots,u_n)$ constituée de vecteurs propres de la matrice A.

e. Vérifier que pour X et Y de $\mathbb{R}^n$, on a $\varphi(X,Y)=Y^{\mathrm{T}}AX=X^{\mathrm{T}}AY$.

f. Soit J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

Déterminer les valeurs propres de J et en déduire une matrice diagonale Δ semblable à la matrice A.

g. Donner l'expression de $\varphi(X,Y)$ en fonction des coordonnées de ces vecteurs dans la base u.

h. Retrouver alors le résultat de la question **2.c.**

PROBLÈME

Pour les valeurs du complexe z pour lesquelles la série $\sum \frac{z^n}{n^\alpha}$ est convergente, on posera :

$$S_\alpha(z)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^n}{n^\alpha}.$$

La restriction de S_α aux valeurs réelles x pour lesquelles la série $\sum \frac{z^n}{n^\alpha}$ converge sera notée f_α.

En cas de convergence de la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$, sa somme est notée $\zeta(\alpha)$.

Les parties **I**, **II**, **III** et **IV** sont *totalement* indépendantes.

Partie I

Généralités

4. **a.** Donner le rayon de convergence R commun à toutes les séries entières définissant les fonctions S_α.

b. Discuter, suivant les valeurs de α, l'existence de $f_\alpha(R)$ et de $f_\alpha(-R)$. Récapituler en donnant, suivant les valeurs de α, le domaine de définition $\mathcal{D}_\alpha$ de f_α.

c. Donner, pour $\alpha>0$, le signe de $f_\alpha(x)$ en différenciant les cas suivant le signe de x élément de $]-1,1[$.

d. Expliciter f_0, f_{-1} et f_{-2}.

5. Étude de la limite à gauche en 1

a. Soit α un réel pour lequel 1 est dans le domaine de définition de f_α. Prouver alors que f_α est continue en 1 (on citera avec précision le théorème utilisé).

b. Si $1\notin\mathcal{D}_\alpha$, prouver que $\lim\limits_{x\to1^-} f_\alpha(x)=+\infty$ (on pourra dans ce cas comparer f_α à f_1).

6. Soient α et λ deux réels.

a. Donner une condition nécessaire et suffisante sur α et λ pour qu'il existe un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},P)$ et une variable aléatoire X_α sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$ à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que :

$$\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\ P(X_\alpha=n)=\frac{\lambda}{n^\alpha}.$$

b. Supposant cette condition réalisée, donner une condition nécessaire et suffisante pour que la variable aléatoire X_α possède une espérance.

Déterminer alors cette espérance (on exprimera le résultat à l'aide de la fonction ζ).

Partie II

Cas où α est entier négatif

7. On suppose dans cette question que $\alpha = -2$. En écrivant $n^2 = n(n-1) + n$, déterminer la somme de la série $\sum n^2 x^n$ pour x réel élément de $]-1,1[$.

8. Adapter la méthode de la question **7.** pour déterminer la somme de la série $\sum n^3 x^n$ pour x réel élément de $]-1,1[$.

9. On suppose maintenant que $\alpha = -p$ est un entier négatif.

a. Prouver que la famille $\big(1, X, X(X-1), \cdots, X(X-1)...(X-p+1)\big)$ est une base de l'espace des polynômes de degré plus petit que p.

b. En déduire que la fonction définie sur $]-1,1[$ par : $x \mapsto (1-x)^{p+1} \sum_{n=0}^{+\infty} n^p x^n$ est une fonction polynôme.

10. Déterminer un équivalent, quand x tend vers 1 par valeurs inférieures, de $\sum_{n=0}^{+\infty} n^p x^n$.

Partie III

Un logarithme complexe

On pose ici, pour z complexe, $S(z) = -S_1(-z) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}$.

11. Donner le rayon de convergence R de la série entière définissant S. Que vaut $\exp\big(S(x)\big)$ pour x réel élément de l'intervalle $]-R,R[$?

On se propose de prouver que cette dernière égalité reste valable pour z complexe, avec $|z| < R$. On fixe pour cela un complexe non nul z_0 de module strictement plus petit que R, et on considère la série entière de la variable réelle t suivante :

$$\sum (-1)^{n-1} \frac{(tz_0)^n}{n} = \sum (-1)^{n-1} \frac{{z_0}^n}{n} t^n .$$

On a donc, dès que sa somme g est définie, $g(t) = S(tz_0)$.

12. Quel est le rayon de convergence de la série entière définissant g ? Prouver que g est définie, dérivable sur $[0,1]$. Que vaut $g'(t)$ pour t dans $[0,1]$?

13. On pose ici $h(t) = \exp(g(t))$.

Prouver que h est dérivable sur $[0,1]$ et que l'on y a $h'(t) = \frac{z_0}{1+tz_0} h(t)$.

14. On pose, pour t dans $[0,1]$, $w(t)=\dfrac{h(t)}{1+tz_0}$.

a. Prouver que w est dérivable et calculer w'.

b. En déduire que $\exp\big(S(z_0)\big)=1+z_0$, c'est-à-dire ce que l'on désirait prouver.

15. On choisit ici $z_0=\dfrac{\sqrt{2}}{2}-1+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

a. Vérifier que $|z_0|<1$. Quelles sont les valeurs possibles de $S(z_0)$?

b. Prouver que $|S(z_0)|\leq 2$ et en déduire la valeur de $S(z_0)$.

Partie IV

Une série associée aux f_p

16. **a.** Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \dfrac{x^n}{n^2-n}$.

b. Calculer, sur un intervalle que l'on précisera, la dérivée de la fonction $L : x \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty}\dfrac{x^n}{n^2-n}$ (le résultat attendu ne comporte plus de signe Σ).

c. En déduire la valeur de $L(x)$.

17. Pour $x\in]-1,1[$, on pose $g_\alpha(x)=f_\alpha(x)-1=\sum_{n=2}^{+\infty}\dfrac{x^n}{n^\alpha}$.

a. Prouver que la famille $\left(\dfrac{x^n}{n^p}\right)_{n,p\geq 2}$ est sommable.

b. En déduire la convergence de la série $\sum_{p\geq 2} g_p(x)$ et calculer sa somme.