Exercice 1

Dzéta(2) par Wallis.

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} t \,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad Z_n = \int_0^{\pi/2} t^2 \cos^{2n} t \,\mathrm{d}t \,.$$

1. **a.** Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $W_{n+1} = \dfrac{2n+1}{2n+2} W_n$ (on pourra intégrer par parties en écrivant $W_{n+1} = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos t \cos^{2n+1} t \,\mathrm{d}t$).

b. Prouver que pour tout $n \geq 1$, on a $W_n = 2n \displaystyle\int_0^{\pi/2} t \sin t \cos^{2n-1} t \,\mathrm{d}t$.

c. En déduire que pour tout $n \geq 1$, on a $W_n = n\big((2n-1)Z_{n-1} - 2nZ_n\big)$.

d. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $Q_n = \dfrac{Z_n}{W_n}$. Prouver que :

$$\forall\, n \geq 1,\ Q_{n-1} - Q_n = \frac{1}{2n^2} \,.$$

2. **a.** Justifier que, pour tout x de $[0, \pi/2]$, on a l'inégalité $x \leq \dfrac{\pi}{2} \sin x$.

b. En déduire que :

$$\forall\, n \geq 1,\ Z_n \leq \frac{\pi^2}{4}(W_n - W_{n+1}) \leq \frac{\pi^2}{4} \frac{W_n}{2n+2} \,.$$

3. **a.** Prouver que la suite (Q_n) tend vers 0.

b. Calculer la somme de la série $\sum \dfrac{1}{n^2}$.

Exercice 2

On étudie dans cet exercice trois séries « standards ». Chaque étude consiste en l'enchainement d'un certain nombre de phrases qui ne sont pas toutes correctes du point de vue mathématique. Il vous est demandé d'analyser chaque phrase et de dire si elle est correcte ou non. **Pour les phrases correctes, on complètera leur argumentation quand celle-ci sera jugée insuffisante** ; pour les phrases incorrectes, on précisera la nature de leur incorrection. J'attire votre attention sur les deux points suivants : d'une part, **une phrase peut être correcte (et on devra donc la considérer comme telle !), tout en aboutissant à un résultat faux, si son argumentation est juste mais qu'elle s'appuie sur une hypothèse fausse** (par exemple, si la phrase a. affirme l'équivalent faux $\ln(1+\frac{1}{n}) \sim \frac{2}{n}$ et que la phrase b. en déduit l'équivalent − toujours faux - $\ln^2(1+\frac{1}{n}) \sim \frac{4}{n^2}$, cette dernière devra être considérée comme juste) ; d'autre part, une phrase peut être incorrecte, tout en aboutissant à un résultat exact.

4. La série $\sum u_n$ avec $u_n(x) = (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{1+nx^n}$ (x réel strictement positif)

a. Pour $x > 1$, la suite $(u_n(x))$ ne tend pas vers 0, la série est donc divergente.

b. Pour $0 < x < 1$, $|u_n(x)| \sim x^{2n}$ ce qui assure la convergence absolue de la série.

c. Pour $x = 1$, $u_n(1) \sim \dfrac{(-1)^n}{n}$ qui est le terme général d'une série convergente. La série $\sum u_n(1)$ est donc elle-aussi convergente.

d. S'il y a lieu, étudier correctement ceux des cas qui, selon vous, auraient été mal étudiés.

5. La série $\sum u_n$ avec $u_n = \dfrac{e^{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}}{n^{2+\frac{1}{n}}}$

a. $1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{n} \underset{\infty}{\sim} \ln n$.

b. Donc $e^{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}} \underset{\infty}{\sim} n$.

c. Par suite, $u_n \underset{\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}} \geq 0$ qui est le terme général d'une série de Riemann convergente ($1 + \dfrac{1}{n} > 1$).

d. La série $\sum u_n$ est donc convergente.

e. Donner une étude correcte de cette série dans le cas où des bêtises auraient été dites.

6. La série $\sum u_n$ avec $u_n = \ln(n+1)\ln(1+\sin 1/n^2)$

a. Puisque $n \underset{\infty}{\sim} n+1$, on peut affirmer que $\ln n \underset{\infty}{\sim} \ln(n+1)$.

b. De même, $\ln(1+\sin\dfrac{1}{n^2}) \underset{\infty}{\sim} \ln(1+\dfrac{1}{n^2}) \underset{\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$.

c. Alors $u_n \underset{\infty}{\sim} \dfrac{\ln n}{n^2}$ et donc $n^{\frac{3}{2}} u_n \underset{n\infty}{\rightarrow} 0$.

d. La série $\sum u_n$ est donc convergente.

e. Corriger la ou les fautes s'il y a lieu.

Exercice 3

Étant donnée une suite réelle (a_n), on associe à tout couple (u_0, u_1) de nombres réels la suite (u_n) définie à partir de ces deux valeurs initiales u_0 et u_1 par la relation de récurrence $(\mathcal{R})$:

$$\forall n \geq 1,\ u_{n+1} = u_n + a_{n-1}u_{n-1}.$$

7. On suppose dans cette question que la suite (a_n) est constante égale à k.

a. On prend $k = -\frac{3}{16}$. Prouver que la suite (u_n) converge quelles que soient les valeurs de u_0 et u_1.

Quelle est sa limite ? Que peut-on dire de la convergence de la série $\sum u_n$?

b. On prend $k = -\frac{1}{4}$. Prouver que la suite (u_n) converge quelles que soient les valeurs de u_0 et u_1.

Quelle est sa limite ? Que peut-on dire de la convergence de la série $\sum u_n$?

c. On prend $k = \frac{3}{4}$. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur u_0 et u_1 pour que la suite (u_n) converge.

8. On suppose dans cette question que les a_n sont des <u>entiers relatifs non nuls</u> (donc des éléments de $\mathbb{Z}^*$).

a. Prouver que si la suite (u_n) converge, sa seule limite possible est 0 (attention aux bêtises !).

b. On considère la suite (ε_n) vérifiant la relation de récurrence $(\mathcal{R})$ avec les conditions initiales $\varepsilon_0 = 1$ et $\varepsilon_1 = 0$. Prouver que cette suite ne tend pas vers 0 (on pourra constater que les ε_n sont tous entiers).

c. Soit la suite (λ_n) vérifiant la relation de récurrence $(\mathcal{R})$ avec les conditions initiales $\lambda_0 = \lambda \in \mathbb{R}$ et $\lambda_1 = 0$. Prouver que pour tout entier n, on a $\lambda_n = \lambda\varepsilon_n$.

d. Prouver qu'une suite (u_n) non identiquement nulle, vérifiant la relation $(\mathcal{R})$, et qui s'annule au moins une fois, ne peut être convergente.

9. On suppose dans cette question que la suite (a_n) est à termes positifs, qu'elle tend vers 0 et que $u_0 \geq 0$ et $u_1 > 0$.

a. Étudier, à partir du rang 1, le sens de variation de la suite (u_n).

b. Prouver que $u_{n+2} \sim u_{n+1}$.

En déduire un équivalent de $\ln\frac{u_{n+2}}{u_{n+1}}$, puis une condition nécessaire et suffisante de convergence de la série $\sum \ln\frac{u_{n+2}}{u_{n+1}}$.

c. Prouver que la suite (u_n) converge si et seulement si la série $\sum a_n$ converge

10. On suppose toujours dans cette question que la suite (a_n) est à termes positifs et qu'elle tend vers 0, mais on ne fait plus l'hypothèse de positivité des deux premiers termes de la suite (u_n) comme dans la question **9.**. Prouver que la suite (u_n) converge quelles que soient les valeurs de u_0 et de u_1.

11. Dans cette question, on ne suppose plus les a_n positifs, mais on suppose que la série $\sum a_n$ est absolument convergente. On considère alors la suite (v_n) définie par

$$v_0 = |u_0|,\ v_1 = |u_1|,\ \text{et}\ \ \forall n \geq 1,\ v_{n+1} = v_n + |a_{n-1}|v_{n-1}.$$

a. Comparer $|u_n|$ et v_n, et prouver que la suite (v_n) est convergente.

b. Étudier la convergence absolue de la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$, puis la convergence de la suite (u_n).

12. Bien évidemment, au vu du résultat de la question **11.** qui montre que la suite (u_n) converge dès que la série $\sum a_n$ converge *absolument*, il semble assez naturel de se demander ce qui se passe si la série $\sum a_n$ est juste supposée convergente. On choisit donc dans cette question de prendre $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$.

Pour peu que u_n soit non nul, on posera $q_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$; il pourra alors être utile d'écrire la formule de récurrence vérifiée par la suite (q_n).

On suppose momentanément que l'on a l'inégalité $\dfrac{1}{2} \leq q_3 \leq 2$.

a. Prouver alors que q_n existe pour tout entier $n \geq 3$, et que l'on a encore $\dfrac{1}{2} \leq q_n \leq 2$.

b. Prouver que l'on a les développements asymptotiques suivants :

$$q_{n+1} = 1 + \mathcal{O}(\frac{1}{n}) \text{, puis } q_{n+1} = 1 + \frac{(-1)^n}{n} + \mathcal{O}(\frac{1}{n^2}).$$

c. En déduire la convergence de la suite (u_n).

On ne suppose plus dans les questions **12.d.** et **12.e.** que l'on a l'inégalité $\dfrac{1}{2} \leq q_3 \leq 2$.

d. Prouver qu'il est possible de choisir u_0 et u_1 de telle sorte que $u_3 = u_4 = 1$. Que dire alors de la suite (u_n) ?

Prouver de même qu'il est possible de choisir u_0 et u_1 de telle sorte que $u_3 = 1$ et $u_4 = 2$. Que dire alors de la suite (u_n) ?

e. Prouver que la suite (u_n) converge quelles que soient les valeurs de u_0 et u_1.
