EXERCICE

On considère les deux ensembles de complexes suivants :

$$A = \left\{a + \mathrm{i}b\sqrt{2},\ a,b \in \mathbb{Z}\right\} \text{ et } \mathbb{K} = \left\{a + \mathrm{i}b\sqrt{2},\ a,b \in \mathbb{Q}\right\}.$$

1. **a.** Prouver (en allant à l'essentiel !) que $\mathbb{K}$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$ et que A est lui-même un sous-anneau de $\mathbb{K}$.

b. Soit z un élément non nul de $\mathbb{K}$. Prouver que $1/z$ est dans $\mathbb{K}$. Que peut-on en déduire ?

2. Pour $z = a + \mathrm{i}b\sqrt{2} \in A$ ($a,b \in \mathbb{Z}$), on pose $\varphi(z) = a^2 + 2b^2$.

a. Prouver que $\forall\, z, z' \in A,\ \varphi(zz') = \varphi(z)\varphi(z')$.

b. En déduire que $z \in A$ est inversible dans A si et seulement si $\varphi(z) = 1$.

c. Déterminer les unités de A.

3. **a.** Représenter par un dessin la disposition des points de A dans le plan complexe.

b. En déduire que pour tout complexe Z, il existe un élément z de A tel que $\left|Z - z\right| < 1$.

c. Soient α et β deux éléments de A, $\beta \neq 0$. Prouver l'existence de deux éléments q et r de A tels que :

$$\alpha = q\beta + r \text{ avec } \left|r\right| < \left|\beta\right|.$$

PROBLÈME

Question préliminaire

4. Soit $P = a_n X^n + \ldots + a_1 X + a_0$ (a_0 et a_n non nuls) un polynôme à coefficients entiers, et $r = \dfrac{p}{q}$ un nombre rationnel (p et q entiers premiers entre eux). Prouver que p divise a_0 et q divise a_n.

Partie I

On considère la suite (P_n) de polynômes définis par :

$$P_0 = 1,\ P_1 = 2X + 1,\ \forall n \geq 0,\ P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n,$$

et l'on pose :

$$Q_n(X) = P_n\left(\frac{X}{2}\right).$$

5. *Propriétés générales des polynômes* P_n.

a. Donner le degré du polynôme P_n, préciser son coefficient dominant ainsi que son terme constant. Déterminer les polynômes P_n pour $n = 2$ et 3, et prouver que, pour tout n, les coefficients des polynômes Q_n sont des entiers relatifs.

b. Démontrer que les seules racines rationnelles possibles du polynôme Q_n sont les entiers 1 et -1. Exprimer le polynôme $Q_{n+3} + XQ_n$ en fonction de Q_{n+1}. En déduire que les racines rationnelles éventuelles des polynômes Q_{n+3} et Q_n sont les mêmes. Préciser les polynômes P_n possédant une racine rationnelle.

6. *Recherche de polynômes annulateurs.*

Soit θ un réel donné compris strictement entre 0 et π. Considérons la suite (u_n) définie par la donnée de u_0 et de u_1 et la relation de récurrence :

$$\forall n \geq 0,\ u_{n+2} = 2u_{n+1}\cos\theta - u_n .$$

a. Déterminer l'expression du terme général u_n de la suite définie ci-dessus.

b. Utiliser les résultats précédents pour exprimer le réel $v_n = P_n(\cos\theta)$ en fonction des réels n et θ. En déduire toutes les racines $x_{k,n}$ ($1 \leq k \leq n$) du polynôme P_n.

c. Déterminer trois polynômes à coefficients entiers M_5, M_7 et M_9 tels que les réels $\cos(\frac{2\pi}{5})$, $\cos(\frac{2\pi}{7})$ et $\cos(\frac{2\pi}{9})$ soient chacun racine de l'un de ces polynômes.

Partie II

On considère la suite (T_n) de polynômes définis par :

$$T_0 = 1,\ T_1 = X,\ \forall n \geq 0,\ T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n ,$$

7. **a.** Prouver que T_n est à coefficients entiers relatifs, et donner son degré ainsi que son coefficient dominant.

b. Déterminer T_2 et T_3.

c. Prouver que T_n a même parité que n et déterminer ses valeurs en -1 et 1.

8. Prouver que $\forall x \in \mathbb{R}, T_n(\cos x) = \cos nx$.

9. Quelles sont, en supposant n supérieur ou égal à 1, les racines de T_n (on cherchera au préalable les racines de T_n situées dans $[-1,1]$ sous la forme $\cos\alpha$) ? Vérifier que celles-ci sont toutes réelles, simples et appartenant à l'intervalle $]-1,1[$.

10. **a.** Montrer, en écrivant les ch sous forme exponentielle, que T_n vérifie la propriété (*) suivante :

$$(*) :\ \forall u \in \mathbb{R}, T_n(\operatorname{ch} u) = \operatorname{ch} nu .$$

b. Soit n un entier non nul, et x un réel supérieur ou égal à 1.
Prouver l'existence d'un réel u tel que $x = \operatorname{ch} u$.
En déduire l'encadrement :

$$0 \leq T_n(x) \leq 2^{n-1}x^n .$$

c. En quoi peut-on considérer que la majoration de $T_n(x)$ obtenue à la question précédente n'est guère améliorable ?

Partie III

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, et soient $x_1, x_2, \ldots, x_p$ p réels éléments de $[a,b]$. Interpoler f aux points x_k, c'est assimiler f à l'unique polynôme de degré plus petit que $p-1$ qui prend les mêmes valeurs que f aux x_k. L'objet de cette partie est, dans un premier temps, de prouver l'existence et l'unicité d'un tel polynôme interpolateur et d'évaluer l'erreur commise quand on substitue ce polynôme à f.

Dans un deuxième temps, on se pose le problème suivant : puisque l'on a le choix des points x_k, comment les répartir dans le segment $[a,b]$ pour que l'interpolation soit la plus efficace possible ?

Polynôme d'interpolation de Lagrange.

On fixe ici un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, un entier p supérieur ou égal à 2, et p points $x_1, x_2, \ldots, x_p$ de $[a,b]$ deux à deux distincts. Soit d'autre part une fonction numérique f définie sur $[a,b]$.

11. **a.** Expliciter (c'est du cours !) un polynôme P_0 de degré plus petit que $p-1$ prenant les mêmes valeurs que f aux x_k

b. Expliciter en fonction de P_0 *tous* les polynômes P coïncidant avec f sur les x_k.

c. En déduire que P_0 est l'unique polynôme de degré inférieur ou égal à $p-1$ qui prend les mêmes valeurs que f aux points x_k.

Évaluation de l'erreur.

On garde ici les notations de la question **11.**. On suppose de plus que f est de classe $\mathcal{C}^p$, et on pose $g = f - P_0$.

12. Soit x un élément fixé de $[a,b]$, différent de tous les x_k.

a. Prouver qu'il est possible de choisir une constante réelle K pour que la fonction h définie sur $[a,b]$ par :

$$h(t) = g(t) - K(t-x_1)\ldots(t-x_p)$$

s'annule en tous les x_k et aussi en x. Ce choix de K sera supposé fait dans la suite.

b. Prouver alors que la dérivée $h^{(p)}$ s'annule sur $[a,b]$.

c. En déduire l'existence d'un point c de $[a,b]$ tel que :

$$g(x)=\frac{g^{(p)}(c)}{p!}(x-x_1)\ldots(x-x_p).$$

d. Soit M un majorant de la valeur absolue de la dérivée d'ordre p de f sur $[a,b]$. Prouver que pour tout x de $[a,b]$, on a l'inégalité suivante :

$$\left|f(x)-P_0(x)\right| \leq \frac{M}{p!}\left|(x-x_1)\ldots(x-x_p)\right|.$$

Choix des points d'interpolation.

On suppose ici que l'intervalle $[a,b]$ est l'intervalle $[-1,1]$, et on fixe toujours une fonction numérique f de classe $\mathcal{C}^p$ sur $[-1,1]$. Puisqu'il n'est pas possible de jouer sur l'ordre de grandeur de la dérivée d'ordre p de f qui est fixée, le bon choix des x_k pour faire la meilleure interpolation de f possible est, en vertu de l'inégalité qui vient d'être prouvée, celui qui minimise le produit $\left|(x-x_1)\ldots(x-x_p)\right|$ quand x décrit $[-1,1]$.

On munit donc $\mathbb{R}_p[X]$ de la norme $\|P\| = \sup_{-1 \leq t \leq 1} |P(t)|$, et il s'agit de déterminer, de tous les polynômes unitaires de degré p, celui (ou ceux) qui sont de norme minimale. On est bien d'accord ?

13. **a.** Calculer $\|T_p\|$.

On posera dans la suite $U_p = \dfrac{T_p}{2^{p-1}}$, de telle sorte que U_p est un polynôme unitaire de norme égale à $\dfrac{1}{2^{p-1}}$

b. Résoudre, pour x dans $[-1,1]$, l'équation $|U_p(x)| = \dfrac{1}{2^{p-1}}$.

c. Soit Q un polynôme unitaire de degré p, et de norme strictement inférieure à $\dfrac{1}{2^{p-1}}$. En envisageant certaines valeurs prises par le polynôme $Q - U_p$, conclure à une impossibilité.

d. Quel est, en toute généralité, le bon choix à faire pour les points $x_1, x_2, \ldots, x_p$ d'interpolation ?

e. Faire un dessin, par exemple pour $p = 16$, de la répartition d ces points dans l'intervalle $[-1,1]$.

Partie IV

Il est bien connu que $\cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$. On a donc

$$0 < \frac{1}{3} < \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3} \in \mathbb{Q}, \quad \cos\frac{\pi}{3} \in \mathbb{Q}$$

L'objet de cette partie est de déterminer si $\dfrac{1}{3}$ est, ou non, l'unique rationnel r vérifiant :

$$0 < r < \frac{1}{2} \text{ et } \cos(r\pi) \in \mathbb{Q}.$$

Soit donc r un rationnel vérifiant $0 < r < \dfrac{1}{2}$ et $\cos(r\pi) \in \mathbb{Q}$. Si $r = \dfrac{p}{q}$, p et q étant des entiers naturels premiers entre eux, on a donc :

$$1 \leq p < \frac{q}{2}, \text{ ce qui entraîne que } q \geq 3.$$

14. Montrer que $\cos\dfrac{\pi}{q}$ est rationnel (on utilisera l'identité de Bézout et les résultats de la partie **II**).

15. **a.** Montrer que q n'est pas multiple de 4 (on utilisera la partie **II**). Il est donc possible d'écrire $q = h$ ou $q = 2h$, h étant un entier impair supérieur ou égal à 3.

b. En supposant que $q = h$ entier impair, montrer que $h = 3$, puis que $p = 1$ (on utilisera la partie préliminaire).

c. Peut-on avoir $q = 2h$?

16. Conclure.

That's all, Folks !