Exercice I

Une série de fonctions

On pose, quand c'est possible :

$$f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+n^2}\,.$$

1. **a.** Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}$ de la fonction f, et prouver que f est continue sur $\mathcal{D}$.

b. Calculer la limite de f en $+\infty$.

c. Prouver que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur une certaine partie $\mathcal{D}'$ de $\mathcal{D}$ que l'on déterminera, et y déterminer sa dérivée.

d. Prouver que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{D}'$ et y déterminer ses dérivées successives.

2. **a.** Calculer $f''+f$ (le résultat attendu ne comporte pas de signe somme).

b. Prouver que f est la seule solution de l'équation différentielle précédente qui tend vers 0 à l'infini.

3. **a.** Prouver l'inégalité, pour $x>0$, $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+n^2}\le\frac{\mathrm{e}^{-2x}}{1-\mathrm{e}^{-x}}$.

b. Donner un équivalent de $f(x)$ au voisinage de $+\infty$.

4. On se propose de déterminer la limite de f' en 0^+, ou plus exactement celle de $-f'$ de manière à raisonner sur des séries positives.

Soit A un réel positif.

a. Prouver l'existence d'un entier N tel que $\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\frac{n}{1+n^2}\ge A+1$.

b. Prouver l'existence d'un réel $\alpha>0$ tel que :

$$\forall\, x\in\,]0,\alpha],\ \sum_{n=1}^{N}\frac{n\,\mathrm{e}^{-nx}}{1+n^2}\ge A\,.$$

c. Minorer $-f'(x)$ pour $x\in\,]0,\alpha]$. Qu'a-t-on prouvé ?

d. La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

Exercice II

Méthode de Simpson

L'objet de cet exercice est de majorer l'erreur commise dans la méthode de Simpson.

5. Soit $P=\alpha X^2+\beta X+\gamma$ un polynôme réel de degré inférieur ou égal à 2.

Prouver, pour a et b réels, la formule intégrale suivante :

$$\int_a^b P(t)\,\mathrm{d}t = \frac{b-a}{6}\big(P(a)+4P(\frac{a+b}{2})+P(b)\big)$$

6. Soit g une fonction numérique de classe $\mathcal{C}^4$ sur le segment $[-1,1]$. On pose $m_4 = \sup_{t\in[-1,1]} \left|g^{(4)}(t)\right|$ et, pour $u \in [0,1]$:

$$\delta(u) = \int_{-u}^{u} g(t)\,\mathrm{d}t - \frac{u}{3}\big(g(-u)+4g(0)+g(u)\big).$$

a. Justifier l'existence de m_4.

b. Calculer δ', δ'' et δ'''.

c. Prouver que pour tout $u \in [0,1]$, $\left|\delta'''(u)\right| \leq \frac{2}{3} m_4 u^2$.

d. En déduire, par intégrations successives, des majorations de $\left|\delta''(v)\right|$, puis de $\left|\delta'(t)\right|$ pour v et t dans $[0,1]$.

e. Prouver enfin que $\left|\delta(1)\right| \leq \frac{m_4}{90}$.

7. Soit h une fonction numérique de classe $\mathcal{C}^4$ sur un segment $[\alpha,\beta]$ de $\mathbb{R}$. On pose $M_4 = \sup_{t\in[\alpha,\beta]} \left|h(t)\right|$.

En posant, pour $t \in [-1,1]$, $g(t) = h(\frac{\alpha+\beta}{2} + t\frac{\beta-\alpha}{2})$, prouver la majoration :

$$\left|\int_\alpha^\beta h(t)\,\mathrm{d}t - \frac{\beta-\alpha}{6}\big(h(\alpha)+4h(\frac{\alpha+\beta}{2})+h(\beta)\big)\right| \leq \frac{M_4}{2880}(\beta-\alpha)^5 .$$

8. Soit f une fonction numérique de classe $\mathcal{C}^4$ sur un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$. On pose $M_4 = \sup_{t\in[a,b]} \left|f(t)\right|$.

Prouver la majoration suivante :

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{b-a}{6n}\sum_{k=0}^{n-1}\big(f(a+k\frac{b-a}{n})+4f(a+(k+\frac{1}{2})\frac{b-a}{n})+f(a+(k+1)\frac{b-a}{n})\big)\right| \leq \frac{M_4}{2880\,n^4}(b-a)^5 .$$

Problème

Soit $a = (a_n)$ une suite de réels *positifs* tendant vers 0 *en décroissant*, et x un réel élément de $]0,2\pi[$. En cas de convergence de la série, on posera :

$$f_a(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos nx .$$

9. **a.** Prouver la convergence de la série définissant $f_a(\pi)$.

b. On suppose dans cette seule question que la série $\sum a_n$ est convergente. Prouver que la fonction f_a est bien définie sur $]0,2\pi[$ et qu'elle y est continue.

10. **a.** Calculer la somme $C_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$.

b. Prouver que pour tout entier n, $\left|C_n(x)\right| \le \dfrac{1}{\sin \frac{x}{2}}$.

c. Prouver la convergence de la série $\sum (a_k - a_{k+1}) C_k(x)$.

d. Prouver la formule sommatoire :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \cos kx = a_n C_n(x) + \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1})\, C_k(x).$$

e. En déduire la convergence de la série $\sum a_k \cos kx$.

11. **a.** Prouver que $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \cos kx = \sum_{k=0}^{+\infty} (a_k - a_{k+1})\, C_k(x)$.

Pour éviter de refaire des calculs parfaitement identiques, on admettra que l'on dispose de la formule analogue : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \cos kx = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (a_k - a_{k+1})\, C_k(x)$

b. Prouver que $\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \cos kx\right| \le \dfrac{a_{n+1}}{\sin \frac{x}{2}}$.

c. En déduire que la série de fonctions $\sum a_n \cos nx$ converge uniformément sur tout intervalle de la forme $[a, 2\pi - a]$ avec $0 < a < \pi$.

d. Que peut-on en déduire concernant la fonction définie par :

$$\forall\, x \in]0, 2\pi[,\ f_a(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos nx \ ?$$

12. On pose, pour $x \in [0, 2\pi]$, $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sin nx}{n^2}$.

a. Prouver que S est bien définie sur $[0, 2\pi]$ et qu'elle y est continue.

b. Prouver que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, 2\pi[$ et donner une expression de $S'(x)$ sous forme d'une série.

13. **a.** Le crochet [ ] désignant la fonction partie entière, déterminer une constante strictement positive α, indépendante de x (ça vaut mieux pour une constante…), telle que, pour tout réel x de l'intervalle $]0, 1/2]$, on ait l'inégalité :

$$\sum_{k=1}^{[1/x]-1} \frac{\cos(kx)}{k} \ge \alpha \ln([1/x]).$$

b. Montrer, à l'aide de la question **11.**, que la fonction $g(x) = \sum_{k=[1/x]}^{+\infty} \dfrac{\cos(kx)}{k}$ est bornée sur $]0, 1/2]$.

c. En déduire que $\lim_{x \to 0^+} S'(x) = +\infty$.