L'exercice et le problème sont totalement indépendants. Les calculs de l'exercice n'étant pas franchement violents, passer plus d'une heure et demie dessus me semblerait parfaitement déraisonnable !

EXERCICE

On étudie dans ce problème, sur quelques exemples, l'existence de « racines carrées » pour des matrices carrées réelles, c'est-à-dire, pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l'existence de matrices $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $R^2 = A$.

1. **a.** Prouver que pour que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ possède des racines carrées, il est nécessaire que $\det A \geq 0$.

b. Prouver qu'une éventuelle racine carrée de A commute avec A.

c. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et R une éventuelle racine carrée de A.

Calculer R^4 et en déduire que $R^2 = 0$. Que peut-on en conclure ?

d. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $R = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ une éventuelle racine carrée de A.

Écrire les équations vérifiées par a, b, c et d..
Peut-on avoir $c = 0$? $b = 0$? $a + d = 0$?
Conclure.

e. La condition nécessaire donnée à la question **1.a.** est-elle suffisante ?

2. Pour $a \in \mathbb{R}$, on envisage la matrice $M(a) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

a. Calculer $M(a)^2$.

b. Que peut-on en conclure ?

3. Pour $a \in \mathbb{R}$, on envisage la matrice $A(a) = \begin{pmatrix} 1+2a & a & a \\ -3+2a & a+4 & a \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

a. Déterminer le polynôme caractéristique de $A(a)$ (indication pour ne pas perdre trop de temps : deux des trois valeurs propres ne dépendent pas de a. L'une de ces deux-là se trouve facilement grâce aux deux dernières colonnes du déterminant caractéristique).

b. Pour quelle(s) valeurs de a peut-on affirmer sans calcul que $A(a)$ est diagonalisable ?

c. Traiter le(s) cas particulier(s) rencontré(s) à la question **3.b.**

d. Donner une condition nécessaire (portant sur a) pour que $A(a)$ possède des racines carrées.

4. On choisit ici $a = 5$ et l'on pose $B = A(5) = \begin{pmatrix} 11 & 5 & 5 \\ 7 & 9 & 5 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Prouver que B est diagonalisable et donner une forme diagonalisée de B (on écrira donc $B = PDP^{-1}$ et on explicitera D et P mais on ne calculera pas P^{-1}).

b. Donner la forme générale des matrices commutant avec D et en déduire *toutes* les racines carrées de D.

c. Déterminer toutes les racines carrées de B.

PROBLÈME

Les matrices diagonales et triangulaires sont des exemples triviaux de matrices possédant leurs valeurs propres sur la diagonale. Ce problème s'intéresse aux matrices présentant cette particularité.

Toutes les matrices envisagées dans ce problème sont à coefficients *réels*. n est un entier supérieur ou égal à 2.

On dira qu'une matrice $A = (a_{i,j})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une **matrice à diagonale propre** (ce que l'on pourra abréger en « A est une **MDP** ») si ses termes diagonaux sont ses valeurs propres avec le même ordre de multiplicité, c'est-à-dire si le polynôme caractéristique de A est :

$$P_A(X) = \prod_{i=1}^{n} (X - a_{i,i}).$$

On notera $\mathcal{E}_n$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à diagonale propre.

Partie I
(Exemples)

Soit α un réel, et $M(\alpha)$ la matrice suivante :

$$M(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \alpha \\ 0 & 2 & -\alpha \\ 1 & 1 & 2-\alpha \end{pmatrix}.$$

5. Calculer, en donnant le détail des calculs, le polynôme caractéristique de la matrice $M(\alpha)$.
Prouver que $M(\alpha)$ est une matrice à diagonale propre pour tout réel α.

6. Quelles sont les valeurs de α pour lesquelles la matrice $M(\alpha)$ est diagonalisable ?

7. On considère la matrice antisymétrique A suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A est-elle une matrice à diagonale propre ?

8. *Cas* $n = 2$
Déterminer $\mathcal{E}_2$; est-ce un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?

Partie II
(Test dans le cas $n = 3$)

9. **a.** Donner, en toute généralité, une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice à diagonale propre soit inversible.

b. Donner un exemple de matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, non diagonale et à diagonale propre, inversible, et telle que A^{-1} soit également à diagonale propre. On donnera A^{-1}.

10. Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Prouver que A est à diagonale propre si et seulement si l'on a les deux conditions suivantes :

$$\det A = a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} \quad \text{et} \quad a_{1,2}a_{2,1} + a_{1,3}a_{3,1} + a_{2,3}a_{3,2} = 0\,.$$

11. Parmi les huit matrices suivantes, déterminer celles qui sont à diagonale propre :

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ -8 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 6 \end{pmatrix} \qquad A_6 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A_7 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad A_8 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

12. Conjecturer une condition nécessaire et suffisante portant sur les produits $a_{1,2}a_{2,1}$, $a_{1,3}a_{3,1}$ et $a_{2,3}a_{3,2}$ pour qu'une matrice A à diagonale propre inversible soit telle que A^{-1} soit également à diagonale propre (on demande juste d'énoncer cette conjecture, sans chercher à la prouver… ce qui, d'ailleurs le propre d'une conjecture !).

Partie IV

(Quelques propriétés)

13. Si A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à diagonale propre, prouver que, pour tout couple (a,b) de réels, les matrices $aA + bI_n$ et $a\,{}^tA + bI_n$ sont encore des matrices à diagonale propre.

14. *Matrices trigonalisables*

a. Une matrice trigonalisable est-elle nécessairement une matrice à diagonale propre ?

b. Justifier qu'une matrice à diagonale propre est trigonalisable.

c. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ soit semblable à une matrice à diagonale propre.

15. Démontrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est somme de deux matrices à diagonale propre.

$\mathcal{E}_n$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

Partie V

(Matrices symétriques et antisymétriques)

On notera $\mathcal{S}_n$ le sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices symétriques, et $\mathcal{A}_n$ le sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices antisymétriques.

16. Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Expliciter $\operatorname{tr}(A^{\mathrm{T}} A)$.

17. *Matrices symétriques à diagonale propre*

a. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{S}_n$ une matrice symétrique dont les valeurs propres (complexes *a priori*) sont notées $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Prouver que $\displaystyle\sum_{i,j} a_{i,j}^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$.

b. Quelles sont les matrices symétriques réelles à diagonale propre ?

18. *Matrices antisymétriques à diagonale propre*

Soit A une matrice antisymétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à diagonale propre.

a. Prouver que $A^n = 0$ et calculer $(A^{\mathrm{T}} A)^n$.

b. Prouver que $A^{\mathrm{T}} A = 0$, puis que A est nulle.

Partie IV

(Dimension maximale d'un sous-espace inclus dans $\mathcal{E}_n$)

19. Rappeler la dimension de $\mathcal{A}_n$ (on justifiera sa réponse).

20. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $F \subset \mathcal{E}_n$.

Démontrer, en envisageant $\dim(F + \mathcal{A}_n)$, que :

$$\dim F \leq \frac{n(n+1)}{2}.$$

Quelle est la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inclus dans $\mathcal{E}_n$?

Fin du problème.