Ce devoir est constitué de deux problèmes indépendants. Je vous conseille fortement de répartir votre temps à peu près équitablement entre les deux.

Les parties grisées de l'énoncé sont réservées aux 5/2.

C'est votre dernier DS mes p'tits canards !

PROBLÈME 1

On considère les équations différentielles suivantes, où q et f sont des fonctions continues, définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$:

$$(E)\ :\ y'' + qy = 0\ \ ;$$
$$(E_f)\ :\ y'' + qy = f\,.$$

Toutes les fonctions considérées sont des fonctions à valeurs réelles.

Partie I

1. **a.** Résoudre l'équation différentielle (E_f) dans le cas où q est constante égale à 1 et $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x^2$.

b. On suppose ici $f = 0$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ q(x) = -(2 + 4x^2)$. Soit y une solution de $(E)\ :\ y'' - (2 + 4x^2)y = 0$.

On pose, pour tout $t > 0,\ z(t) = y(\sqrt{t})$, de sorte que l'on a $\forall x > 0,\ y(x) = z(x^2)$.

Écrire l'équation différentielle vérifiée par la fonction z, et en déterminer « à vue » une solution. En déduire une solution de (E), puis la solution générale de (E) (cette dernière s'exprime avec un symbole intégrale).

*On suppose dans toute la suite de cette partie (questions **2.** et **3.**) que la fonction q est constante égale à 1.*

2. **a.** Prouver que l'application $P \mapsto P + P''$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ dans lui-même.

b. Que peut-on en déduire concernant l'équation différentielle $y'' + y = f$ dans le cas particulier où f est une fonction polynôme ?

3. On suppose dans cette question que $I = \mathbb{R}^+$ et que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f(t)|\mathrm{d}t$ est convergente.

a. Prouver que la solution générale de (E_f) s'écrit :

$$y(x) = \int_x^{+\infty} \sin(t-x)f(t)\mathrm{d}t + \alpha\cos x + \beta\sin x\,,$$

où α et β sont des constantes réelles.

b. En déduire que toutes les solutions de (E_f) sont bornées sur $\mathbb{R}^+$, et qu'il y en a une et une seule qui tend vers 0 en $+\infty$.

Partie II

On suppose dans cette partie que I est centré en 0 et que q est paire et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I.

4. Soit y est une solution de (E) sur I. Montrer y est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et que la fonction $x \mapsto y(-x)$ est aussi une solution de (E).

5. **a.** Justifier l'existence et l'unicité de deux solutions de (E), notées f_0 et f_1, vérifiant les conditions suivantes :

$$f_0(0) = 1 \quad ; \quad f_0{}'(0) = 0 \quad ; \quad f_1(0) = 0 \quad ; \quad f_1{}'(0) = 1\,.$$

b. Prouver grâce à la question **4.** que la fonction f_0 est paire et la fonction f_1 impaire.

c. Prouver que la fonction $f_0 f_1{}' - f_0{}' f_1$ est constante égale à 1.

6. On suppose que f_0 ne s'annule pas sur I, et l'on pose $u = \dfrac{f_1}{f_0}$.

a. Déterminer une constante B telle que $u' = \dfrac{B}{f_0^2}$.

b. On note u_0 la primitive de $\dfrac{1}{f_0^2}$ qui s'annule en 0. Exprimer f_1 en fonction de f_0 et de u_0.

7. Dans cette question, $q(x) = -(1+x^2)$ pour tout réel x.

a. Chercher une solution particulière de l'équation différentielle sous la forme e^z où z est une fonction que l'on déterminera.

b. Résoudre complètement l'équation différentielle (on ne cherchera pas à calculer l'intégrale rencontrée).

8. Dans cette question, on suppose que $I =]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[$ et que la fonction $x \mapsto \cos^2 x$ est solution de (E) sur I.

a. Déterminer les fonctions q et f_0.

b. Déterminer la fonction u_0 (on pourra utiliser l'identité $\dfrac{1}{\cos^4 t} = \dfrac{1+\tan^2 t}{\cos^2 t}$ et exprimer $u_0(x)$ en fonction de $\tan x$).

c. En déduire la valeur de la fonction f_1 et exprimer la solution générale de (E) sur I.

On suppose dans la suite du problème que $I = \mathbb{R}$.

9. **a.** Soit y la solution de (E) prenant la valeur α en 0 et dont la dérivée vaut β en 0. Prouver que y est égale à la fonction $\alpha f_0 + \beta f_1$.

b. Prouver que la famille (f_0, f_1) est une base de l'espace vectoriel $\mathcal{S}$ des solutions de (E).

d. Les fonctions f_0 et f_1 peuvent-elles avoir un zéro commun ?

10. On suppose que la fonction q est π -périodique.

a. Prouver que si y est une solution de (E), l'application $x \mapsto y(x+\pi)$ est aussi une solution de (E).

On définit alors trivialement un endomorphisme T de l'espace $\mathcal{S}$ en associant à une solution y de (E) la solution $T(y)$ définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto y(x+\pi)$.

b. Montrer que T est inversible (*indication* : c'est quoi le contraire d'ajouter π ?)

c. Écrire la matrice M de T dans la base (f_0, f_1) à l'aide des valeurs en π des fonctions f_0 et f_1 et de leurs dérivées. Calculer le déterminant de M et en déduire la matrice M^{-1}.

d. Écrire la matrice de T^{-1} à l'aide des valeurs en $-\pi$ des fonctions f_0 et f_1 et de leurs dérivées.

11. Déduire des questions **9.** et **10.** que si q est paire et π -périodique, les coefficients diagonaux de M sont égaux.

On suppose dans ce qui suit que q est à la fois paire et π -périodique, et l'on désigne par α la valeur commune des coefficients diagonaux de M. On suppose par ailleurs que $|\alpha| < 1$.

12. **a.** Prouver que la matrice M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

b. Que peut-on dire du module des valeurs propres de la matrice M ?

c. Prouver que la suite (M^n) des puissances de M est bornée.

13. En écrivant que pour tout x de $[0,\pi]$ et tout entier n, on a $f_0(x+n\pi) = T^n(f_0)(x)$, prouver que f_0 est bornée sur $\mathbb{R}$. Prouver de même que f_1 est bornée sur $\mathbb{R}$. En déduire que toute solution de (E) est bornée sur $\mathbb{R}$.

PROBLÈME 2

L'objet de ce problème est l'étude de certaines propriétés, selon les hypothèses faites sur f, d'une fonction $F = T(f)$ définie *dans tout le problème* par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ T(f)(x) = F(x) = \int_0^1 f(t)\cos(xt)\,\mathrm{d}t\,,$$

où x est une variable réelle, et f une fonction donnée à valeurs réelles. On s'intéressera notamment à l'étude du comportement de F en $+\infty$.

Pour une fonction φ définie au voisinage de $+\infty$, l'écriture $\varphi(x) = \mathcal{O}(\frac{1}{x})$ signifie que la fonction $x\varphi(x)$ est bornée au voisinage de $+\infty$.

On dit d'une fonction continue h sur un intervalle I qu'elle est *intégrable* sur I si l'intégrale de h sur I est *absolument convergente*, en d'autres termes si $\int_I |h(t)|\mathrm{d}t$ existe.

Partie I

Le cas où f est continue sur $[0,1]$.

Pour toute fonction g définie et bornée sur l'intervalle $[0,1]$, on pose $N_\infty(g) = \sup_{0\le t\le 1} |g(t)|$.

Pour toute fonction g définie sur l'intervalle $]0,1]$, on pose $N_1(g) = \int_0^1 |g(t)|\mathrm{d}t$ dès que cette intégrale existe.

Dans cette partie, la fonction f est définie et continue sur l'intervalle $[0,1]$.

14. **a.** Déterminer, en fonction de $N_1(f)$, une constante positive A telle que pour tout réel x, on ait $|F(x)| \leq A$.

b. Déterminer, en invoquant juste un théorème du cours, la limite de F en $+\infty$.

15. On suppose de plus que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[0,1]$. Déterminer, en intégrant par parties, une constante positive B que l'on exprimera à l'aide de $N_\infty(f)$ et de $N_1(f')$ telle que, pour tout réel x, on ait $|xF(x)| \leq B$.

16. On suppose maintenant que f est de classe $\mathcal{C}^1$ seulement sur l'intervalle $]0,1]$, et que f' est intégrable sur cet intervalle. L'inégalité obtenue à la question **2.** est-elle encore valable ?

17. On ne fait plus à nouveau qu'une hypothèse de continuité de f, et l'on pose $G(x) = -\int_0^1 tf(t)\sin(xt)\mathrm{d}t$.

a. On pose, pour t fixé dans $\mathbb{R}$, $u(x) = \cos(xt)$. Prouver, pour x et h dans $\mathbb{R}$, l'inégalité :

$$\left|u(x+h) - u(x) - hu'(x)\right| \leq \frac{h^2}{2}t^2.$$

b. En déduire que $\left|F(x+h) - F(x) - hG(x)\right| \leq \frac{h^2}{2}\int_0^1 t^2 \left|f(t)\right| \mathrm{d}t$.

c. Prouver que F est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée G.

d. Prouver que F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et donner ses dérivées successives.

Partie II

Un cas particulier où l'intégrale définissant f est impropre.

Dans cette partie, la fonction f est la fonction définie sur l'intervalle $]0,1]$ par $f(t) = \frac{1}{t^\lambda}$, avec $\lambda \in]0,1[$.

18. Donner, le domaine de définition de la fonction F.

19. Prouver que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{t^\lambda}\mathrm{d}t$ est convergente (on pourra intégrer par parties).

20. **a.** On pose $Z_\lambda = \int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{t^\lambda}\mathrm{d}t$. Exprimer Z_λ en fonction de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{\lambda+1}}\mathrm{d}t$, puis de $\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^{\lambda+2}}\mathrm{d}t$

b. En déduire que $Z_\lambda \neq 0$ (on ne cherchera pas à calculer Z_λ).

c. En utilisant un changement de variable simple, prouver l'existence d'un nombre complexe C tel que $F(x)$ soit équivalent, quand x tend vers $+\infty$, à $\frac{C}{x^{1-\lambda}}$.

21. **a.** Déterminer une constante réelle positive D telle que, pour tout réel strictement positif x, on ait :

$$\left|\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t^\lambda}\mathrm{d}t\right| \le \frac{D}{x^\lambda}.$$

b. En déduire que l'on a, au voisinage de $+\infty$, $F(x) = \dfrac{C}{x^{1-\lambda}} + \mathcal{O}(\dfrac{1}{x})$ (C est la constante de la question **20.**).

Partie III

Une généralisation de la partie II.

Dans cette partie, on se donne une fonction h de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, un nombre réel λ appartenant toujours à $]0,1[$, et on définit la fonction f sur $]0,1]$ par $f(t) = \dfrac{h(t)}{t^\lambda}$.

22. Donner le domaine de définition de la fonction F.

23. On suppose *dans cette question* que $h(0) = 0$. Montrer que $t \mapsto t^\lambda f'(t)$ admet une limite finie en zéro, et en déduire que $xF(x)$ est borné.

24. Prouver qu'au voisinage de $+\infty$, on a $F(x) = \dfrac{C\,h(0)}{x^{1-\lambda}} + \mathcal{O}(\dfrac{1}{x})$.

25. Donner un équivalent, lorsque x tend vers $+\infty$, de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \cos t \cos(xt^2)\mathrm{d}t$.

Partie IV

Dans cette partie, f est une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1]$ telle que la fonction f' soit intégrable sur $]0,1]$.

26. Prouver que f possède une limite finie en zéro. On prolonge alors f par continuité à $[0,1]$ et ce prolongement sera encore noté f.

27. Déterminer la limite, quand x tend vers $+\infty$, de $\displaystyle\int_0^1 f'(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}\mathrm{d}t$ (la version « usuelle » du lemme de Lebesgue est supposée connue).

28. On suppose que $|f(1)| \neq |f(0)|$. Donner un équivalent simple de $F(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

29. Donner un équivalent, quand x tend vers $+\infty$, de $\displaystyle\int_0^1 \sin t^2 \cos(xt^2)\mathrm{d}t$.

Fin de carrière pour Frédéric Dupré.