ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

1. Résoudre les systèmes différentiels suivants :

a. $\begin{cases} x' = -3x + 2y + \mathrm{e}^t \\ y' = -2x + 2y \end{cases}$

b. $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = y + z \\ z' = x + y + 2z \end{cases}$ (trigonaliser la matrice du système sous la forme $\begin{bmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$).

c. $\begin{cases} x'' = -3x + y \\ y'' = 2x - 2y \end{cases}$

d. $\begin{cases} (t^2+1)x' = tx - y + 2 \\ (t^2+1)y' = x + ty - 2t \end{cases}$ (on pourra envisager une inconnue auxiliaire $z = \dots$).

2. Résoudre les équations différentielles suivantes :

a. $y' + y\cos x = \sin x \cos x$ **b.** $|x|\,y' + (x-1)y = x^2$ **c.** $y'' + y' + y = x\,\mathrm{e}^x$

d. $x^2y'' + xy' - y = x\ln x$ **e.** $y'' + 4y = \cos x + x$ **f.** $y''' + 3y'' - 4y = x$

g. $xy'' + 2y' + xy = 0$ (utiliser un changement de fonction)

h. $4xy'' + 2y' + y = 0$ (il y a deux solutions inverses l'une de l'autre.)

i. $y'' + \dfrac{2x}{1+x^2}y' + \dfrac{y}{(1+x^2)^2} = 0$ (poser $t = \operatorname{arctg} x$) **j.** $x^2(1-x)y'' - x(1+x)y' + y = 0$

k. $y'' - (1+x^2)y = 0$ (*indication* : chercher une solution sous la forme e^z)

3. Intégrer l'équation différentielle $x(x+1)y' + y = \arctan x$, puis traiter les problèmes de raccords.

4. **a.** Chercher les fonctions continues f sur $\mathbb{R}$ vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \displaystyle\int_0^x t\,f(t)\mathrm{d}t$.

b. Chercher les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f'(x) = f(1-x)$.

5. On considère l'équation différentielle (non linéaire !) $(E) : xy' + (x+1)y - x^2y^2 = 0$, dont on cherche les solutions sur des intervalles I inclus dans $\mathbb{R}_+^*$. On admettra que de telles solutions (mise à part la fonction nulle !) ne s'annulent pas sur I.

a. En observant bien l'équation étudiée, poser une fonction auxiliaire z pour laquelle l'équation différentielle obtenue est linéaire.

b. Intégrer l'équation différentielle (E). Possède-t-elle des solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ autres que la fonction nulle ?

6. f désigne une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telle que $f + f'' \geq 0$. Prouver que pour tout réel x, on a $f(x) + f(x+\pi) \geq 0$ (poser $g = f + f''$ et intégrer formellement cette équation différentielle, c'est à dire exprimer f en fonction de g).

7. Résoudre l'équation différentielle $y'' + y = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$.

8. On envisage deux solutions u et v linéairement indépendantes de l'équation différentielle $(E) : y'' + qy = 0$ où q est une fonction continue de I dans $\mathbb{R}$ (I intervalle de $\mathbb{R}$).

a. Prouver que la fonction $uv' - u'v$ est constante non nulle.

b. Soit a un zéro de la fonction u. Prouver que $v(a) \neq 0$.

c. Soient a et b deux zéros de la fonction u avec $a < b$. Prouver que la fonction v s'annule entre a et b (on supposera que tel n'est pas le cas et on étudiera les variations de la fonction u/v sur $[a,b]$.

9. On donne une fonction f continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$.

a. Prouver que l'application $P \mapsto P + P''$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ dans lui-même.

b. Que peut-on en déduire concernant l'équation différentielle $(E_f) : y'' + y = f$ dans le cas particulier où f est une fonction polynôme ?

c. Sous quelle forme la méthode de variations des constantes donne-t-elle les solutions de (E_f) ?

d. En déduire que la solution générale de (E_f) s'écrit :

$$y(x) = \int_0^x \sin(x-t) f(t) \mathrm{d}t + a\cos x + b\sin x \ \ (a, b \in \mathbb{R}).$$

10. Soit K une solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle (E) : $xy'' + y' + y = 0$. Le but de ce qui suit est de prouver que K s'annule une infinité de fois sur $\mathbb{R}_+^*$, et ce <u>en utilisant le seul fait que K est solution de (E).</u>

On suppose provisoirement qu'il existe $c > 0$ tel que pour tout $x \geq c$, on ait $K(x) > 0$.

a. Calculer en fonction de K'^2 la dérivée sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction $x \mapsto xK'^2(x) + K^2(x)$.

En déduire l'existence d'une constante M telle que pour tout $x \geq c$, on ait $xK'^2(x) + K^2(x) \leq M$.

b. Montrer que la fonction qui à x associe $xK'(x)$ est décroissante sur $[c, +\infty[$.

c. Soit $x_0 \geq c$. Pour $x \geq x_0$, on pose $D(x) = K(x) - x_0 K'(x_0) \ln x$.

Quel est le signe de $D'(x)$? Peut-on avoir $K'(x_0) < 0$? Qu'en conclure ?

d. Montrer que K admet en $+\infty$ une limite a strictement positive.

e. Montrer qu'il existe $x_1 \geq c$ tel que pour tout $x \geq x_1$, on ait $K''(x) \leq -\dfrac{a}{2x}$.

f. En déduire une impossibilité, puis que K s'annule une infinité de fois sur $\mathbb{R}_+^*$.

11. Soit ω la solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' + xy = 0$ vérifiant $\omega(0) = 1$ et $\omega'(0) = 0$.

a. Prouver que ω est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

On fixe un entier n supérieur ou égal à 1, et on étudie sur l'intervalle $I_n = [2n\pi, (2n+1)\pi]$ la fonction δ suivante :

$$\forall x \in I_n, \quad \delta(x) = \omega'(x)\sin x - \omega(x)\cos x.$$

b. Exprimer simplement la dérivée de δ, et dresser son tableau de variations sur l'intervalle I_n en supposant, par exemple, que l'on a $\omega(x) > 0$ pour tout x de I_n.

c. Conclure à une impossibilité. Qu'a-t-on prouvé ?

12*. Soit $q : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}^+, q(x) > 1$. On note f la solution de l'équation différentielle $y'' - qy = 0$ vérifiant $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$. Prouver que $\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) \geq \operatorname{ch} x$.

13. Soit $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une fonction continue. On suppose que les matrices $A(t)$ sont co-diagonalisables. Justifier que le système différentiel $X' = AX$ peut (au moins virtuellement) être intégré.