# ESPACES PRÉHILBERTIENS

**1.** ***Des produits scalaires***

**a.** Pour $X=(x,y,z)$ et $X'=(x',y',z')$ éléments de $\mathbb{R}^3$, on pose :

$$(X\,|\,X') = xx' + 5yy' + 3zz' + 2xy' + 2x'y - xz' - x'z - yz' - y'z\,.$$

Prouver que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$ (on éliminera tour à tour chaque variable en la mettant dans un terme au carré). Déterminer une base orthonormée pour ce produit scalaire.

**b.** On se donne une suite $(a_n)$ injective d'éléments de $[0,1]$ et l'on pose, pour $f$ et $g$ éléments de l'espace $E=\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ des fonctions numériques continues sur $[0,1]$ :

$$(f\,|\,g) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f(a_n)g(a_n)}{2^n}\,.$$

Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur la suite $(a_n)$ pour que l'on définisse ainsi un produit scalaire sur $E$.

**c.** Soit $E$ l'espace des suites $(x_n)$ de réels telles que la série $\sum x_n$ soit *absolument* convergente. Pour $x=(x_n)$ et $y=(y_n)$ dans $E$, on pose $(x\,|\,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n$. Prouver que l'on définit ainsi un produit scalaire sue $E$ et déterminer l'orthogonal du sous-espace constitué des suites nulles à partir d'un certain rang. Commentaire ?

**d.** Prouver que la norme $n_\infty$ sur *n'est pas* une norme euclidienne sur $E=\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$.

**e.** Montrer que l'on définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ en posant $(M\,|\,N)=\mathrm{tr}(M^{\mathrm{T}}N)$. Commentaire ?

---

**2.** Calculer $\displaystyle\inf_{a,b\in\mathbb{R}} \int_0^1 \left|t^4-(at+b)\right|^2 \mathrm{d}t$.

---

**3.** Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, et $\omega$ une fonction numérique continue sur $I$ à valeurs strictement positives telle que les fonctions $t\mapsto t^n\omega(t)$ soient toutes intégrables sur $I$. On définit sur $\mathbb{R}[X]$ le produit scalaire donné par :

$$(P,Q)=\int_I PQ\omega\,.$$

**a.** Prouver l'existence d'une famille orthogonale $(P_n)$ de polynômes unitaires tels que $\deg P_n = n$ pour tout $n$.

**b.** Grâce au théorème des degrés étagés, calculer $(P_n,P)$ si $\deg P < n$.

**c.** En déduire l'unicité d'une telle famille $(P_n)$.

**d*.** Prouver que $P_n$ a toutes ses racines réelles, simples, et dans l'intervalle d'intégration $I$ (on envisagera $(P_n,Q)$ où $Q$ est le polynôme dont les racines sont celles de $P$ qui sont dans $I$ et de multiplicité impaire dans $P$).

---

**4.** L'espace $E$ des fonctions continues sur $[0,2]$ est muni du produit scalaire $(f\,|\,g)=\displaystyle\int_0^2 f(t)g(t)\mathrm{d}t$. Déterminer l'orthogonal du sous-espace $F$ des fonctions dont la restriction à $[0,1]$ est nulle. Prouver que l'on a $F^{\perp\perp}=F$ mais que l'on n'a pas $E=F\oplus F^{\perp}$.

**5.** Soit $(x_1,\ldots,x_p)$ une famille de $p$ vecteurs d'un espace préhilbertien $E$ tel que :

$$\forall\, i,j \in [[1,p]],\ i \neq j \Rightarrow \left\|x_i - x_j\right\| \geq 1\,.$$

**a.** Montrer que $\displaystyle\sum_{i<j}\left\|x_i - x_j\right\|^2 = p\sum_{i=1}^{p}\left\|x_i\right\|^2 - \left\|\sum_{i=1}^{p}x_i\right\|^2$.

**b.** En déduire que si une boule fermée contient tous les $x_i$, son rayon est plus grand que $\sqrt{\dfrac{p-1}{2p}}$

---

**6.** Soit $E$ l'espace des fonctions numériques continues sur $[0,1]$.

**a.** Prouver que l'on définit un produit scalaire sur $E$ en posant :

$$(f\,|\,g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t\,.$$

**b.** Prouver, pour tout entier $n$, l'existence d'un polynôme $Q_n$, unique, tel que pour tout réel $x$, $Q_n(\cos x) = \dfrac{\sin nx}{\sin x}$.

**c.** Calculer $(Q_p\,|\,Q_q)$ (les $Q_n$ sont dits « polynômes de Tchebychev de seconde espèce »).

---

**7.** Soient $x_1,\ldots,x_p$ $p$ vecteurs d'un espace préhilbertien $E$. On définit leur matrice de Gram par :

$$G(x_1,\ldots,x_p) = \big((x_i\,|\,x_j)\big)_{i,j} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})\,.$$

**a.** Quelle est la matrice de Gram d'une famille orthonormale ? orthogonale ?

**a.** Prouver que si la famille $(x_1,\ldots,x_p)$ est liée, la matrice $G(x_1,\ldots,x_p)$ est non inversible.

**b.** Inversement, en supposant la matrice $G(x_1,\ldots,x_p)$ non inversible, prouver que la famille $(x_1,\ldots,x_p)$ est liée (on écrira une relation de dépendance linéaire des colonnes de cette matrice)

**c.** Soit $F$ un sous-espace de dimension finie de $E$, et $(e_1,\ldots,e_p)$ une base de $F$. Prouver que pour tout $x$ de $E$, la distance $d$ de $x$ à $F$ est donnée par :

$$d^2 = \frac{\det\, G(e_1,\ldots,e_p,x)}{\det\, G(e_1,\ldots,e_p)}\,.$$

---

**8.** ***Inégalité de Bessel***

Soit $E$ un espace préhilbertien et $(e_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une famille orthonormale dénombrable d'éléments de $E$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $F_n = \operatorname{vect}\left\{e_0, e_1,\ldots,e_n\right\}$. On fixe un élément $x$ de $E$ et on note $x_n$ le projeté orthogonal de $x$ sur $F_n$.

**a.** Justifier l'existence de $x_n$.

**b.** Prouver que $E$ n'est pas de dimension finie.

**c.** Comparer $\|x\|$ et $\|x_n\|$.

**d.** En déduire que la série $\sum (x|e_p)^2$ est convergente et majorer sa norme.

**e.** Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la suite $(x_n)$ converge vers $x$.

---