XMP 2022-2023

INTÉGRATION

1. Calculer $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{x-2}\displaystyle\int_2^x \frac{\ln t}{t+\mathrm{i}\sqrt{t^3+1}}\mathrm{d}t$.

2. Soit f une fonction continue sur un voisinage de 0 à valeurs dans $\mathbb{C}$. Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0+}\frac{1}{x^2}\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t,\quad \lim_{x\to 0+}\int_x^{2x}\frac{f(t)}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t \quad\text{et}\quad \lim_{x\to 0+}\int_x^{2x}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t\,.$$

3. Étudier la fonction définie par $f(x)=\displaystyle\int_x^{x^2}\frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$ (je veux une étude de fonction complète ! Donc domaine de définition, c'est la moindre des choses et même là il y a des trucs élémentaires mais à dire correctement, limites aux bornes, dérivabilité en cas de prolongement par continuité, étude des branches infinies… pour déterminer la limite en 1, on pourra multiplier et diviser par t dans l'expression de f, et encadrer).

4. Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ à valeurs strictement positives. Prouver, grâce aux sommes de Riemann, l'inégalité :

$$\int_0^1 \ln(f(t))\,\mathrm{d}t \le \ln\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t \quad \text{(inégalité de Jensen).}$$

5. Calculer par deux méthodes la limite de la suite $u_n=\left[\dfrac{(2n)!}{n!n^n}\right]^{\frac{1}{n}}$.

6. Soit $A_1A_2\dots A_n$ un polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle unité. Déterminer $\lim\limits_{n}\ \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}A_1A_k$.

7. Soit f un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $[a,b]$ sur $[\alpha,\beta]$. Calculer (2 méthodes) $\displaystyle\int_\alpha^\beta f^{-1}(t)\mathrm{d}t$ en fonction de $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.

8. Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que :

$$\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right| = \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

Indication : on écrira $\left|\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right| = \varepsilon\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ *avec* $\varepsilon=\pm 1$.

9. Soit f une fonction continue et T-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Soit F une primitive de f.

a. Prouver que l'intégrale de f est la même sur tout segment de longueur T.

b. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que F soit T-périodique.

10. Soit $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(a)=0$. Prouver l'inégalité :

$$\int_a^b |f(t)|^2\,\mathrm{d}t \le \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b |f'(t)|^2\,\mathrm{d}t$$

Indication : comment l'hypothèse $f(a)=0$ peut-elle se traduire efficacement en termes de calcul intégral ?

11. Première formule de la moyenne

a. Soient f et g deux fonctions numériques continues sur $[a,b]$, g étant supposée positive. Prouver, en encadrant f entre sa borne inférieure et sa borne supérieure, que :

$$\exists c\in[a,b] \text{ tel que } \int_a^b fg = f(c)\int_a^b g\,.$$

b. Soit f une fonction numérique de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$. Prouver l'existence de c dans $[a,b]$ tel que :

$$f(b)=f(a)+(b-a)f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2}f''(c)\,.$$

c. En déduire, pour g numérique de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, un développement limité à l'ordre 1 de la différence :

$$u_n=\int_a^b g(t)\mathrm{d}t-\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} g(a+k\frac{b-a}{n})\,.$$

Indication : on appliquera la question **b.** *à une primitive f de g sur chaque segment $[a_k,a_{k+1}]$ avec $a_k=a+k\dfrac{b-a}{n}$.*

d. Déterminer la limite L de u_n et un équivalent de u_n-L pour $u_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{n^2+k^2}$.

12. Polynômes de Legendre

On note L_n le polynôme suivant :

$$L_n=\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}X^n}(X^2-1)^n\,.$$

a. Calculer L_1, L_2, L_3, donner le degré et le coefficient dominant de L_n.

b. Prouver que -1 et 1 sont racines du polynôme $\dfrac{\mathrm{d}^p}{\mathrm{d}X^p}(X^2-1)^n$ pour $1\le p\le n-1$.

c. En déduire, en intégrant par parties, que $\displaystyle\int_{-1}^{1} L_pL_q=0$ pour $p\ne q$.

13.* Calculer $\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{\mathrm{d}t}{1+\cos^2 t}$. En déduire, si f est continue sur $[0,\pi]$, la limite de $I_n=\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{f(t)}{1+\cos^2 nt}\mathrm{d}t$.

14. Soit $F=\left\{f\in\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})\ /\ \forall t\in[a,b],\ f(t)>0\right\}$. Pour $f\in F$, on pose $P(f)=\displaystyle\int_a^b f\times\int_a^b\frac{1}{f}$.

Déterminer $\displaystyle\inf_{f\in F}P(f)$. Pour quelles fonctions de F est-il atteint ? Existe-t-il une constante majorant tous les $P(f)$ pour f dans F ?