DÉNOMBRABILITÉ, FAMILLES SOMMABLES

1. Les ensembles suivants sont-ils dénombrables ?

a. L'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$.

b. L'ensemble des parties infinies de $\mathbb{N}$.

c. Un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension finie.

d. $\mathbb{Q}[X]$.

---

2. Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction croissante, et $\mathcal{D}$ l'ensemble de ses points de discontinuité. En considérant les ensembles $D_n=\left\{x\in[a,b]\ /\ f(x+0)-f(x-0)\geq 1/n\right\}$, prouver que D est au plus dénombrable.

Prouver que le résultat demeure en remplaçant $[a,b]$ par $\mathbb{R}$.

---

3. Existence et calcul de $\displaystyle\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*}\frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)}$.

---

4. Soit $\sum u_n$ une série convergente de réels positifs et (R_n) la suite de ses restes. Prouver que les séries $\sum nu_n$ et $\sum R_n$ sont de même nature et qu'elles ont même somme en cas de convergence.

---

5. Montrer, pour $z\in\mathbb{C}$, $|z|<1$, l'identité :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^{2n+1}}{1-z^{2n+1}}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^n}{1-z^{2n}}.$$

---

6. Prouver que pour tout $s>1$, $\zeta^2(s)=\displaystyle\sum_{s=1}^{+\infty}\frac{d(n)}{n^s}$ où $d(n)$ désigne le nombre de diviseurs de l'entier n.

---

7. Soit x un réel positif.

a. Décomposer $\dfrac{1}{(X+1)(X+2)\dots(X+n)}$ en éléments simples.

b. En déduire l'égalité $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(x+1)(x+2)\dots(x+n)}=\mathrm{e}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!(x+k)}$ (on posera $\dfrac{1}{(n-k)!}=0$ si $k>n$).

---

8. On pose, pour x réel, $f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-n}\cos(n^2x)$.

a. Prouver que l'on définit ainsi une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et calculer les dérivées successives de f en 0.

b*. Prouver, en utilisant une série double, que la série de Taylor en 0 a un rayon de convergence nul.

9. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul et de somme $S(z)$.

a. Soit $\alpha \in \mathcal{D}(0,R)$ et h un complexe tel que $\left|h\right| < r$ où $r = R - \left|\alpha\right|$.

b. Calculer $S(\alpha+h)$ (?) et l'exprimer sous forme d'une série double (on poser $\binom{n}{p} = 0$ si $p > n$).

c. Prouver que l'on peut permuter l'ordre des sommations dans la série double précédente.

d. En déduire que la fonction $h \mapsto S(\alpha+h)$ est développable en série entière sur le disque $\mathcal{D}(0,r)$.

On a ainsi prouvé que la fonction somme d'une série entière de rayon de convergence R est développable en série entière au voisinage de tout point du disque ouvert de convergence. On parle alors de fonction « analytique ».