FAMILLES SOMMABLES

0. Position du problème

0.1 La convergence commutative

Considérons la série harmonique alternée $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$, dont il est bien connu qu'elle converge et que sa somme est $\ln 2$. Permutons et réassocions ses termes de la façon suivante :

le terme $\frac{1}{2n+1}$ est associé à sa moitié $\frac{-1}{4n+2}$ et on leur retranche $\frac{1}{4n+4}$.

Il est facile de voir que l'on prend ainsi chaque terme de la série initiale une fois et une seule.

La nouvelle série obtenue est donc :

$$(1-\frac{1}{2})-\frac{1}{4}+(\frac{1}{3}-\frac{1}{6})-\frac{1}{8}+(\frac{1}{5}-\frac{1}{10})-\frac{1}{12}+\dots$$

ou encore :

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\dots$$

qui n'est autre que la moitié de la série harmonique alternée initiale !

Puisque l'on n'a pas $\ln 2 = \frac{\ln 2}{2}$, la seule conclusion que l'on peut en tirer est qu'il y a un réel problème mathématique à permuter l'ordre des termes d'une série convergente.

On peut d'ailleurs prouver encore plus étrange que ce résultat déjà étonnant : en modifiant autrement l'ordre de sommation de cette même série, on aurait tout aussi bien pu aboutir à une série divergente, voire à une série convergente dont la somme serait égale à n'importe quel réel que l'on se serait fixé à l'avance (ce résultat est expliqué en annexe) ! Il est donc hors de question de noter $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ la somme de la série harmonique alternée, car une telle notation n'indique pas dans quel ordre on été sommés ses termes…

0.2 Les séries doubles

Il est bien connu, bien que l'on ne sache d'ailleurs pas toujours pourquoi, que l'on peut permuter l'ordre des sommations quand on manipule des sommes finies. Ainsi n'hésite-t-on pas à écrire, si $(z_{n,p})_{\substack{1\le n\le N\\ 1\le p\le P}}$ désigne une famille de complexes :

$$\sum_{n=0}^{N}\sum_{p=0}^{P} z_{n,p} = \sum_{p=0}^{P}\sum_{n=0}^{N} z_{n,p}\ .$$

Observons un peu de quoi il s'agit, en choisissant par exemple $N=3$ et $P=2$. Alors :

$$\sum_{n=1}^{3}\ \sum_{p=1}^{2} z_{n,p} = \sum_{n=1}^{3}(z_{n,1}+z_{n,2}) = (z_{1,1}+z_{1,2})+(z_{2,1}+z_{2,2})+(z_{3,1}+z_{3,2})\,,$$

$$\text{et}\quad \sum_{p=1}^{2}\ \sum_{n=1}^{3} z_{n,p} = \sum_{p=1}^{2}(z_{1,p}+z_{2,p}+z_{3,p}) = (z_{1,1}+z_{2,1}+z_{3,1})+(z_{1,2}+z_{2,2}+z_{3,2})\,.$$

Le fait que ces sommes soient égales résulte donc, comme on s'y attendait, de la commutativité de l'addition, mais aussi de son *associativité* !

Or on vient de voir que la permutation des termes dans une somme infinie ne se fait pas sans difficulté. On peut donc imaginer sans peine, au vu de ce qui précède, que l'interversion de deux sommes infinies risque, elle aussi, de poser quelques problèmes mathématiques…

Prenons un premier exemple pour illustrer ces difficultés :

Les valeurs prises par la suite double $(z_{n,p})_{n,p\geq 1}$ figurent dans le tableau suivant, n étant l'indice de ligne et p l'indice de colonne :

$z_{n,p}$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**...**
1	1	-1	0	0	0	...
2	0	1	-1	0	0	...
3	0	0	1	-1	0	0
4	0	0	0	1	-1	0
5	0	0	0	0	1	-1
...	0	0	0	0	0	1

La somme infinie $\sum\limits_{p=1}^{+\infty} z_{n,p}$ désigne la somme de tous les termes de la $n^{\text{ième}}$ ligne, elle existe donc pour tout n et vaut 0. Il en résulte que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sum\limits_{p=1}^{+\infty} z_{n,p}$ existe et vaut $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 0 = 0$.

De la même façon, la somme infinie $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} z_{n,p}$ désigne la somme de tous les termes de la $p^{\text{ième}}$ colonne, elle existe donc pour tout p et vaut 0, sauf pour $p = 1$ où elle vaut 1. Il en résulte que $\sum\limits_{p=1}^{+\infty} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} z_{n,p}$ existe et vaut 1.

On a donc construit un exemple très simple de suite double telle que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sum\limits_{p=1}^{+\infty} z_{n,p} \neq \sum\limits_{p=1}^{+\infty} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} z_{n,p}$.

Modifions un tout petit peu l'exemple précédent pour illustrer un autre problème :

$z_{n,p}$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**...**
1	1	-1	0	0	0	...
2	0	2	-2	0	0	...
3	0	0	3	-3	0	0
4	0	0	0	4	-4	0
5	0	0	0	0	5	-5
...	0	0	0	0	0	6

Ici encore, la somme infinie $\sum_{p=1}^{+\infty} z_{n,p}$ désigne la somme de tous les termes de la $n^{\text{ième}}$ ligne, elle existe donc pour tout n et vaut 0. Il en résulte que $\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{p=1}^{+\infty} z_{n,p}$ existe et vaut $\sum_{n=1}^{+\infty} 0 = 0$.

Mais la somme infinie $\sum_{n=1}^{+\infty} z_{n,p}$ désigne la somme de tous les termes de la $p^{\text{ième}}$ colonne, elle existe donc pour tout p et vaut 1. Il en résulte que la série $\sum_p \sum_{n=1}^{+\infty} z_{n,p}$ est *divergente* !

Cet exemple prouve par conséquent que $\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{p=1}^{+\infty} z_{n,p}$ peut exister alors que $\sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} z_{n,p}$ n'existe pas...

0.3 Ce polycopié

Pour régler les problèmes précédemment évoqués des séries doubles et de la convergence commutative (mais aussi bien d'autres problèmes de même nature), on est amené à revisiter la théorie des séries pour en donner une toute autre présentation : c'est la théorie des familles sommables, objet de ce polycopié. On notera que cette nouvelle présentation est plus lourde et plus abstraite que celle des séries, mais qu'elle permet d'aboutir à des théorèmes puissants et non triviaux, ce qui justifie amplement les efforts consentis !

Dans toute la suite de ce document, I désignera un ensemble (l'ensemble des indices) supposé être dénombrable (ce choix est expliqué en annexe).

1. Familles sommables de réels positifs

1.1 Définition, exemples

Définition : soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs. On dit que la famille $(u_i)_{i\in I}$ est *sommable* s'il existe une constante positive M telle que, pour toute partie finie J de I, on ait $\sum_{i\in J} u_i \leq M$.

On définit alors la *somme* (notée $\sum_{i\in I} u_i$) de la famille sommable $(u_i)_{i\in I}$ comme étant la borne supérieure de ces sommes finies :

$$\sum_{i\in I} u_i = \sup_{\substack{J\subset I \\ J \text{ finie}}} \sum_{i\in J} u_i \,.$$

Dans le cas où une famille $(u_i)_{i\in I}$ de réels positifs n'est pas sommable, on convient de poser $\sum_{i\in I} u_i = +\infty$.

Exemple 1

Soit a un réel élément de $[0,1[$. On considère la famille $(a^{pq})_{(p,q)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*}$.

Si J est une partie finie de $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$, il existe des entiers N et M tels que $p \leq N$ et $q \leq M$ pour $(p,q)\in J$. Par suite :

$$\sum_{(p,q)\in J} a^{pq} \leq \sum_{p=1}^{N}\sum_{q=1}^{M} a^{pq} = \sum_{p=1}^{N} \frac{a^p - a^{p(M+1)}}{1-a^p} \leq \sum_{p=1}^{N} \frac{a^p}{1-a^p} \leq \frac{1}{1-a}\sum_{p=1}^{N} a^p \leq \frac{1}{1-a}\sum_{p=1}^{+\infty} a^p = \frac{a}{(1-a)^2}\,.$$

On a majoré par une même constante toutes les sommes finies d'éléments de la famille, celle-ci est sommable.

Exemple 2

On considère la famille $\left(\dfrac{1}{p^2+q^2}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*}$.

Par une comparaison classique avec une intégrale, on a :

$$\sum_{q=1}^{N}\frac{1}{p^2+q^2}\geq\int_1^{N+1}\frac{\mathrm{d}t}{p^2+t^2}=\frac{1}{p}(\arctan\frac{N+1}{p}-\arctan\frac{1}{p}).$$

En choisissant N de telle sorte que $N+1=2p$, on a donc $\displaystyle\sum_{q=1}^{2p-1}\frac{1}{p^2+q^2}\geq\frac{1}{p}(\arctan 2-\arctan 1)=\frac{\alpha}{p}$.

Mais la série $\sum\dfrac{\alpha}{p}$ est divergente à termes positifs, ses sommes partielles tendent donc vers $+\infty$. Par suite, pour tout réel $A>0$, il existe un entier n tel que $\displaystyle\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{2p-1}\frac{1}{p^2+q^2}\geq A$: les sommes finies de termes de la famille $\left(\dfrac{1}{p^2+q^2}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*}$ ne sont pas majorées, cette famille n'est pas sommable.

La définition de la sommabilité permet d'avoir très simplement la propriété suivante que l'on utilisera plus loin :

Propriété 1 :
Soient $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ deux familles de réels positifs vérifiant $\forall\, i\in I,\, 0\leq v_i\leq u_i$. Alors, si la famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable, la famille $(v_i)_{i\in I}$ est sommable.

1.2 Un cas particulier important

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs. Il s'agit donc bien d'une famille indexée par un ensemble dénombrable.

Supposons la famille $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sommable. Alors, par définition, la somme $\displaystyle\sum_{i\in I}u_i$ de cette famille sommable majore toutes les sommes finies de termes de la famille, en particulier celles de la forme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}u_k$: la série à termes positifs $\sum u_k$ a donc ses sommes partielles majorées, elle converge. De plus, en passant à la limite dans l'inégalité $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}u_k\leq\sum_{i\in\mathbb{N}}u_i$, on obtient $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}u_k\leq\sum_{i\in\mathbb{N}}u_i$.

Inversement, supposons la série $\sum u_k$ convergente. Soit J une partie finie de $\mathbb{N}$: il existe un entier N tel que $J\subset[[0,N]]$. Alors par positivité des u_i, on a évidemment $\displaystyle\sum_{i\in J}u_i\leq\sum_{k=0}^{N}u_k\leq\sum_{k=0}^{+\infty}u_k$: on a majoré par une même constante toutes les sommes finies de termes de la famille, la famille $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable. Reste à passer au sup à gauche pour obtenir aussi :

$$\sum_{i\in\mathbb{N}}u_i\leq\sum_{k=0}^{+\infty}u_k.$$

On a ainsi prouvé :

Théorème 1 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs. Alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable si et seulement si la série $\sum u_n$ converge, et dans ce cas, on a :

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} u_i = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k .$$

1.3 Sommation par paquets

Le théorème dont l'énoncé suit sera admis. Sa preuve figure en annexe ; sans être particulièrement délicate, elle n'apprend rien d'essentiel et est donc renvoyée à la fin de ce polycopié pour ne pas l'alourdir inutilement.

Au-delà de son énoncé (qu'il faut connaître, bien sûr !), il est tout à fait essentiel de retenir le message de ce théorème : il affirme que si une famille de réels positifs $(u_i)_{i\in I}$ est sommable, alors la somme de cette famille peut être obtenue en sommant n'importe comment les termes de cette famille (c'est-à-dire en les sommant dans n'importe quel ordre, et en les associant comme on le veut). Mais il affirme aussi que, réciproquement, si en sommant tous les termes d'une manière particulière on obtient un résultat fini, alors la famille est sommable.

Mathématiquement, cela s'énonce ainsi :

Théorème 2 (dit de sommation par paquets) :

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs, et $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une partition de l'ensemble d'indices.

Alors la famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si :

i. pour tout entier *n*, la famille $(u_i)_{i\in I_n}$ est sommable ;

et :

ii. la série $\sum(\sum_{i\in I_n} u_i)$ est convergente.

Dans ce cas, on a alors :

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{n=0}^{+\infty}(\sum_{i\in I_n} u_i) .$$

La richesse de ce théorème est donc bien double :

i. il permet de prouver en pratique qu'une famille est sommable en partitionnant à notre convenance notre ensemble d'indices.

ii. une fois prouvé que la famille est sommable, il fournit un moyen de calculer sa somme… mais surtout, en choisissant plusieurs partitions de *I*, il donne des sommes de séries qui sont toutes égales à $\sum_{i\in I} u_i$, et donc **égales entre elles**.

Reprenons les exemples du paragraphe 1.2 à la lumière de ce théorème.

Exemple 1

Nous prendrons ici pour I_n la « $n^{\text{ème}}$ ligne de $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ », c'est-à-dire que $I_n = L_n = \{(n,p),\ p\in\mathbb{N}^*\}$.

La série $\sum_p a^{np}$ étant convergente, on sait d'après le théorème 1. que la famille $\sum_{(n,p)\in L_n} a^{np}$ est sommable, et que sa somme σ_n est égale à $\sum_{p=1}^{+\infty} a^{np} = \frac{a^n}{1-a^n}$.

Mais $\sigma_n \sim a^n \geq 0$, la série $\sum \sigma_n$ converge donc. Il en résulte que la famille $(a^{pq})_{(p,q)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*}$ est sommable, et que sa somme est :

$$\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*} a^{pq} = \sum_{n=1}^{+\infty}\sigma_n = \sum_{n=1}^{+\infty}(\sum_{p=1}^{+\infty} a^{np}) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a^n}{1-a^n}\ .$$

On dit que l'on a sommé la famille $(a^{pq})_{(p,q)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*}$ *en lignes*.

Choisissons maintenant un autre moyen de sommer cette famille. Pour cela, nous allons la sommer en regroupant les couples (p,q) de produit constant. Plus précisément, posons pour $n\geq 1$: $H_n = \{(p,q)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*\ /\ pq=n\}$. Il va de soi que la famille $(H_n)_{n\geq 1}$ constitue une partition de $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$, et il en résulte que :

$$\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*} a^{pq} = \sum_{n=1}^{+\infty}(\sum_{(p,q)\in H_n} a^{pq}) = \sum_{n=1}^{+\infty}(\sum_{pq=n} a^{pq}) = \sum_{n=1}^{+\infty}(\sum_{pq=n} a^{n}) = \sum_{n=1}^{+\infty} a^n(\sum_{pq=n} 1)\ .$$

Mais $\sum_{pq=n} 1$ compte le nombre de couples (p,q) dont le produit vaut n, et il y en a évidemment autant qu'il y a de diviseurs de n. Si l'on note $d(n)$ le nombre de diviseurs de l'entier n, on obtient donc en sommant de deux manières différentes la famille sommable $(a^{pq})_{(p,q)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*}$ la formule non triviale suivante, valable pour tout élément a de $[0,1[$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a^n}{1-a^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} d(n)a^n\ .$$

Exemple 2

Reprenons notre procédé de sommation en lignes en conservant les notations de l'exemple 1.

Pour tout entier n, la famille $\left(\frac{1}{n^2+p^2}\right)_{(n,p)\in L_n}$ est sommable car la série $\sum_p \frac{1}{n^2+p^2}$ est convergente.

Mais par comparaison avec une intégrale, on a facilement :

$$\sigma_n = \sum_{(n,p)\in L_n}\frac{1}{n^2+p^2} = \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+p^2} \geq \frac{1}{n}(\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{1}{n}) \sim \frac{\pi}{2n} \geq 0\ .$$

La série $\sum\sigma_n$ est donc divergente, la famille étudiée n'est pas sommable.

2. Familles sommables de nombres réels quelconques ou de nombres complexes

2.1 Définition, exemples

Définition : soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de complexes. On dit que la famille $(u_i)_{i\in I}$ est *sommable* si la famille de réels positifs $(|u_i|)_{i\in I}$ est elle-même sommable.

On notera que, contrairement aux familles de réels positifs, on n'a pas défini ici la somme d'une famille sommable. En effet, autant la définition qui a été donnée pour les familles de réels positifs est naturelle (la somme de la famille est la borne supérieure de toutes les sommes finies envisageables), autant cette définition n'est plus conforme à l'intuition pour les familles de réels non positifs, et est même totalement dénuée de sens pour les familles de complexes.

Cas particulier

Soit (z_n) une suite de complexes. Par définition et d'après le théorème 1. :

$$(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est sommable } \Leftrightarrow (|z_n|)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est sommable}$$

$$\Leftrightarrow \text{ la série } \sum |z_n| \text{ est convergente}$$
$$\Leftrightarrow \text{ la série } \sum z_n \text{ converge absolument.}$$

La famille de complexes $\left(\dfrac{(-1)^n}{n}\right)_{n\geq 1}$ n'est donc pas sommable, bien que la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n}$ soit convergente.

<u>*Exemple*</u>

Soit λ un complexe de module strictement plus petit que 1. La famille $(\lambda^{pq})_{(p,q)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*}$ est sommable puisque la famille $(|\lambda|^{pq})_{(p,q)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*}$ l'est (exemple 1. du paragraphe 1.).

<u>2.2 Somme d'une famille sommable</u>

Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille de réels non supposés positifs. Posons, pour $i \in I$, $x_i^+ = \sup(x_i, 0)$ et $x_i^- = -\inf(x_i, 0)$.

On a donc pour tout i de I : $x_i = x_i^+ - x_i^-$, $|x_i| = x_i^+ + x_i^-$, $0 \leq x_i^+ \leq |x_i|$ et $0 \leq x_i^- \leq |x_i|$.

Si la famille $(x_i)_{i\in I}$ est supposée sommable, alors les familles $(x_i^+)_{i\in I}$ et $(x_i^-)_{i\in I}$ le sont en vertu de la propriété 1. Il est alors parfaitement naturel de *poser* que la somme de la famille sommable $(x_i)_{i\in I}$ est égale à :

$$\sum_{i\in I} x_i = \sum_{i\in I} x_i^+ - \sum_{i\in I} x_i^- .$$

Soit maintenant une famille $(z_i)_{i\in I}$ de complexes supposée sommable. Posons, pour tout i de I :

$$z_i = x_i + \mathrm{i} y_i \text{ avec } x_i \text{ et } y_i \text{ réels.}$$

Puisque $|x_i| \leq |z_i|$ et $|y_i| \leq |z_i|$, les familles de réels $(x_i)_{i\in I}$ et $(y_i)_{i\in I}$ sont sommables. Or on vient de définir la somme d'une famille de réels sommable. Là encore, on *posera* [1] donc de manière tout à fait naturelle que :

$$\sum_{i\in I} z_i = \sum_{i\in I} x_i + \mathrm{i}\sum_{i\in I} y_i .$$

<u>Propriété 2</u> (linéarité de la somme) :

Soient $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ deux familles sommables de complexes, α et β deux complexes. Alors la famille $(\alpha u_i + \beta v_i)_{i\in I}$ est sommable, et l'on a :

$$\sum_{i\in I} (\alpha u_i + \beta v_i) = \alpha \sum_{i\in I} u_i + \beta \sum_{i\in I} v_i$$

La démonstration de ce résultat est besogneuse et sans grand intérêt : pour l'additivité, on commence par la prouver dans le cas des familles positives, puis on l'étend aux familles de réels puis de complexes grâce à la manière dont on a défini leur somme. Pour la multiplication par un scalaire, on commence par le cas d'une famille positive et d'un scalaire positif, on généralise au cas d'une famille de réels et d'un scalaire réel quelconque, et on termine enfin par le cas où tout est complexe.

<u>2.3 Sommation par paquets</u>

Le théorème qui suit donne une méthode pratique permettant de calculer de plusieurs manières la somme d'une famille sommable de complexes. Son énoncé ressemble très fortement au théorème de sommation par paquets des familles positives. Cependant, il ne faut pas se méprendre : tout d'abord, le fait que ces résultats soient admis ne permet pas de voir en quoi ce nouveau théorème est une *conséquence* du premier, ce qui est pourtant le cas et

[1] En réalité, dans la théorie générale, la somme d'une famille sommable n'est pas définie ainsi. La « vraie » définition de cette somme est donnée en annexe.

empêche *de facto* de regrouper les deux énoncés en un seul. Par ailleurs, la première version donnait une condition *nécessaire et suffisante* pour qu'une famille positive soit sommable. Ici, on fait l'hypothèse *a priori* que la famille est sommable et le théorème donne une propriété permettant de calculer sa somme.

> Théorème (dit de sommation par paquets) :
>
> Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de complexes supposée sommable, et $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une partition de l'ensemble d'indices.
>
> Alors :
>
> *i.* pour tout entier n, la famille $(u_i)_{i\in I_n}$ est sommable ;
>
> *ii.* la série $\sum(\sum_{i\in I_n} u_i)$ est convergente,
>
> et l'on a :
>
> $$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{n=0}^{+\infty}(\sum_{i\in I_n} u_i).$$

Exemple

Reprenons une fois encore l'exemple de la famille $(z^{np})_{(n,p)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*}$ en supposant cette fois-ci que z est un complexe de module strictement plus petit que 1. Cette famille est sommable comme on l'a déjà vu. Notre théorème de sommation par paquets nous permet de la sommer de deux manières différentes, en ligne ou en regroupant les indices à pq constant. On en déduit (le calcul est le même que pour $a\in[0,1[$) que l'on a :

$$\text{pour } |z|<1,\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^n}{1-z^n}=\sum_{n=1}^{+\infty}d(n)z^n .$$

3. Séries doubles, théorème de Fubini

Un cas particulièrement important de familles indexées par un ensemble dénombrable est celui des suites doubles, c'est-à-dire des familles de complexes de la forme $(z_{n,p})_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$.

Par définition, la sommabilité d'une telle famille est équivalente à celle de la famille $(|z_{n,p}|)_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$. Mais d'après le théorème de sommation par paquets pour les familles positives, en choisissant pour I_n la $n^{\text{ème}}$ ligne de $\mathbb{N}^2$, cette sommabilité est équivalente au fait que :

i. pour tout n, la série $\sum_p |z_{n,p}|$ converge ;

ii. la série $\sum_n(\sum_{p=0}^{+\infty}|z_{n,p}|)$ converge.

Supposons alors ces deux conditions remplies, de sorte que la famille $(z_{n,p})_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable. Alors, pour calculer sa somme, on peut tout aussi bien (grâce à la deuxième version du théorème de sommation par paquets) sommer d'abord suivant les colonnes de $\mathbb{N}^2$ que suivant ses lignes : ces deux procédés de sommation donnent le même résultat, à savoir la somme de la famille sommable.

On obtient ainsi le « théorème de Fubini », dont l'énoncé suit :

> Théorème (Fubini) :
>
> Soit $(u_{n,p})_{n,p\in\mathbb{N}}$ une suite double de complexes telle que :
>
> *i.* pour tout entier n, la série $\sum_p |u_{n,p}|$ est convergente ;

ii. la série $\sum_n \sum_{p=0}^{+\infty} \left|u_{n,p}\right|$ est convergente.

Alors on a la formule d'interversion :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} u_{n,p} = \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,p} \ ,$$

les hypothèses sous lesquelles on se place assurant la convergence de toutes ces séries.

Il peut être est important de noter que, dans le cas particulier des séries doubles à termes *réels positifs*, le théorème de Fubini affirme que l'existence de $\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} u_{n,p}$ suffit à assurer l'existence de $\sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,p}$, ainsi que l'égalité de ces deux expressions.

Exemple 1

Soit la suite double $\left(\frac{1}{n^p}\right)_{n,p\geq 2}$. Alors, à n fixé, la série géométrique $\sum_{p\geq 2} \frac{1}{n^p}$ converge, et sa somme, égale à $\frac{\frac{1}{n^2}}{1-\frac{1}{n}} = \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$, est le terme général d'une série convergente.

En bref, on a prouvé que $\sum_{n=2}^{+\infty} \sum_{p=2}^{+\infty} u_{n,p}$ existe, et vaut $\sum_{n=2}^{+\infty} (\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}) = 1$.

La suite double considérée étant à termes réels positifs, on en déduit l'existence de $\sum_{p=2}^{+\infty} \sum_{n=2}^{+\infty} u_{n,p}$, ainsi que sa valeur qui est 1.

Mais $\sum_{p=2}^{+\infty} \sum_{n=2}^{+\infty} u_{n,p} = \sum_{p=2}^{+\infty} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^p} = \sum_{p=2}^{+\infty} (\zeta(p)-1)$ où ζ désigne la fonction dzéta de Riemann.

Finalement, on a prouvé la convergence de la série $\sum \left(\zeta(p)-1\right)$, et l'on a de plus :

$$\sum_{p=2}^{+\infty} \left(\zeta(p)-1\right) = 1 \ .$$

Exemple 2

Soit à prouver que la fonction $z \mapsto \cos(\mathrm{e}^z)$ est développable en série entière sur $\mathbb{C}$. On rappelle les formules suivantes, vues lors du cours sur les séries entières : $\forall u \in \mathbb{C}$, $\cos u = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{u^{2n}}{(2n)!}$ et $\mathrm{ch}\, u = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^{2n}}{(2n)!}$. Écrivons alors, pour z dans $\mathbb{C}$:

$$\cos(\mathrm{e}^z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\mathrm{e}^{2nz}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(2nz)^p}{p!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \frac{(2nz)^p}{p!} \ .$$

Pour appliquer le théorème de Fubini, on a besoin de justifier la convergence de la série double $\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} \left|\frac{(-1)^n}{(2n)!} \frac{(2nz)^p}{p!}\right|$, ce qui en soi n'a rien d'enthousiasmant ! Mais à y regarder de plus près, l'apparition du module a pour effet de tuer le terme en $(-1)^n$ et de remplacer z par $|z|$. Cette nouvelle série double n'est donc que le résultat du calcul légitime de $\mathrm{ch}(\mathrm{e}^{|z|})$, ce qui suffit à assurer sa convergence ! On peut donc permuter les sommations et écrire, pour z quelconque dans $\mathbb{C}$:

$$\cos(e^z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \frac{(2nz)^p}{p!} = \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \frac{(2nz)^p}{p!} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2^p}{p!} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n n^p}{(2n)!} \right) z^p,$$

formule qui, à l'évidence, constitue un développement en série entière, certes pas très joli, mais un développement en série entière quand même de $\cos(e^z)$.

4. Produit de Cauchy

Définition (famille produit) :
Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de complexes. La famille $(a_p b_q)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ est appelée leur *famille produit*.

Cherchons des conditions (suffisantes !) permettant d'assurer qu'une telle famille produit est sommable. Comme il s'agit d'une suite double, nous allons essayer de la sommer en lignes. On souhaiterait donc :

i. que pour tout n, la série $\sum_q |a_n b_q|$ soit convergente. Comme $|a_n|$ est ici une constante multiplicative, il suffit pour cela de demander à la série $\sum |b_q|$ d'être absolument convergente, ce que nous supposerons.

ii. que la série $\sum_n (\sum_{q=0}^{+\infty} |a_n b_q|)$ soit convergente. Comme cette série est, au facteur multiplicatif $\sum_{q=0}^{+\infty} |b_q|$ près, la série $\sum |a_n|$, il est naturel de demander la convergence de cette série $\sum |a_n|$.

Propriété 3 :
Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de complexes. Pour que la famille produit $(a_p b_q)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ soit sommable, il suffit que les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ soient *absolument* convergentes.

Calculons alors, sous ces hypothèses, la somme de la famille produit de deux manières différentes :
En sommant d'abord en lignes, on obtient :

$$\sum_{(n,p)\in\mathbb{N}^2} a_n b_p = \sum_{n=0}^{+\infty} (\sum_{p=0}^{+\infty} a_n b_p) = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n \sum_{p=0}^{+\infty} b_p) = \sum_{p=0}^{+\infty} b_p \sum_{n=0}^{+\infty} a_n .$$

Sommons maintenant « en diagonale », c'est-à-dire en regroupant les couples (p,q) de somme constante : d'après le théorème de sommation par paquets, on a (en posant $D_n = \{(p,q)\in\mathbb{N}^2 \,/\, p+q=n\}$) :

$$\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} a_p b_q = \sum_{n=0}^{+\infty} (\sum_{(p,q)\in D_n} a_p b_q) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\sum_{p+q=n} a_p b_q).$$

On retrouve ainsi le théorème admis lors du cours sur les séries :

Théorème (produit de Cauchy) :
Soient deux séries de complexes $\sum a_n$ et $\sum b_n$ supposées **absolument** convergentes. Alors leur série produit de Cauchy $\sum c_n$ où $c_n = \sum_{p+q=n} a_p b_q = \sum_{p=0}^{n} a_p b_{n-p}$ est absolument convergente, et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \sum_{n=0}^{+\infty} (\sum_{p=0}^{n} a_p b_{n-p}) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \sum_{n=0}^{+\infty} b_n .$$

5. Convergence commutative

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de complexes. Envisageons une permutation σ de l'ensemble des indices, c'est-à-dire une bijection de I sur I. Il est clair que σ transforme les parties finies de I en les parties finies de I. On en déduit aisément que :

i. si la famille $(u_i)_{i\in I}$ est constituée de réels positifs, alors la famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si la famille $(u_{\sigma(i)})_{i\in I}$ l'est, et dans ce cas ces deux familles ont même somme ;

ii. dans le cas général, en se ramenant aux parties positives et négatives dans le cas réel, puis aux parties réelles et imaginaires dans le cas complexe, la famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si la famille $(u_{\sigma(i)})_{i\in I}$ l'est, et dans ce cas ces deux familles ont même somme. En particulier, en supposant $I=\mathbb{N}$, on obtient :

Théorème (convergence commutative) :

Soit une série de complexes $\sum a_n$ supposée **absolument** convergente. Alors pour toute permutation σ de $\mathbb{N}$, la série $\sum a_{\sigma(n)}$ est convergente et l'on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{\sigma(n)} .$$

6. Annexe

6.1 Modification de l'ordre de sommation d'une série semi-convergente pour parvenir à une série de somme donnée

Nous allons donner ici une explication en français de ce résultat étonnant, la formalisation mathématique n'apportant rien (bien au contraire !) du point de vue de la compréhension.

Coupons une série de réels convergente mais non absolument convergente en les deux sous-séries de ses termes positifs et négatifs. Toutes deux divergent sans quoi la série de départ serait soit divergente, soit absolument convergente. Les sommes partielles de la série des termes positifs tendent donc vers $+\infty$, celles de la série des termes négatifs vers $-\infty$. Soit a un réel fixé à l'avance, que l'on supposera positif pour fixer les idées. On commence par sommer les premiers termes positifs de la série jusqu'à dépasser strictement a. Alors on prend les premiers termes négatifs jusqu'à passer strictement en dessous de a. On reprend alors des termes positifs à partir de celui auquel on s'était arrêté la première fois jusqu'à redépasser a et ainsi de suite... on va ainsi réordonner les termes de la série de départ de sorte que certaines sommes partielles oscillent autour de a ; reste à voir que cette oscillation est de plus en plus faible (et donc que la nouvelle suite des sommes partielles converge vers a), ce qui est tout simplement la conséquence du fait que la suite initiale tendait vers 0...

6.2 Pourquoi l'ensemble d'indices est supposé dénombrable

Conservons la définition d'une famille sommable telle qu'elle a été donnée, mais sans rien supposer sur I. Il existe donc une constante M majorant toutes les sommes de la forme $\sum_{i\in J} u_i$ avec J finie quelconque inclus dans I. Posons alors, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $J_n=\{i\in I \ / \ u_i\geq 1/n\}$: J_n possède moins de $n(M+1)$ éléments, sans quoi $\sum_{i\in J_n} u_i$ serait plus grande que $M+1$. J_n est donc fini. Alors $S=\{i\in I \ / \ u_i\neq 0\}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} J_n$ est une réunion dénombrable d'ensembles finis, S est donc fini ou dénombrable. Finalement, pour qu'une famille de réels positifs soit sommable, il est indispensable que l'ensemble des indices i tels que $u_i\neq 0$ soit fini ou dénombrable ; c'est pourquoi, quitte à en enlever les termes nuls, les familles sont supposées être indexées par un ensemble dénombrable.

6.3 Preuve du théorème de sommation par paquets des familles positives

On garde les notations de l'énoncé.

Supposons d'abord la famille $(u_i)_{i\in I}$ sommable.

Soit $p \in \mathbb{N}$. Si J_p est une partie finie incluse dans I_p, J_p est une partie finie incluse dans I par conséquent $\sum_{i\in J_p} u_i \leq \sum_{i\in I} u_i$: on a majoré par une constante toutes les sommes de la forme $\sum_{i\in J_p} u_i$ où J_p est une partie finie quelconque de I_p, la famille $(u_i)_{i\in I_p}$ est donc bien sommable par définition.

Soit maintenant $n \in \mathbb{N}$, J_1 une partie finie de I_1, ..., J_n une partie finie de I_n. Les I_k étant deux à deux disjoints, il en va de même des J_k. Par suite :

$$\sum_{i\in J_1} u_i + \ldots + \sum_{i\in J_n} u_i = \sum_{i\in J_1\cup\ldots\cup J_n} u_i .$$

Mais $J_1 \cup \ldots \cup J_n$ est une partie finie de I, donc $\sum_{i\in J_1\cup\ldots\cup J_n} u_i \leq \sum_{i\in I} u_i$.

Il reste à passer au sup sur J_1, puis sur J_2, puis..., puis sur J_n dans l'inégalité $\sum_{i\in J_1} u_i + \ldots + \sum_{i\in J_n} u_i \leq \sum_{i\in I} u_i$ pour obtenir $\sum_{i\in I_1} u_i + \ldots + \sum_{i\in I_n} u_i \leq \sum_{i\in I} u_i$. La série à termes positifs $\sum(\sum_{i\in I_k} u_i)$ a donc ses sommes partielles majorées, elle converge. Il reste à passer à la limite dans l'inégalité précédente pour obtenir :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(\sum_{i\in I_n} u_i) \leq \sum_{i\in I} u_i .$$

Supposons inversement que pour tout entier n, la famille $(u_i)_{i\in I_n}$ est sommable et que la série $\sum(\sum_{i\in I_n} u_i)$ converge. Soit J une partie finie de I. La famille $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ constituant une partition de I et J étant finie, on est certain de l'existence d'un entier N tel que $J \subset I_1 \cup \ldots \cup I_N$. Alors :

$$\sum_{i\in J} u_i = \sum_{i\in J\cap I_1} u_i + \ldots + \sum_{i\in J\cap I_N} u_i \leq \sum_{i\in I_1} u_i + \ldots + \sum_{i\in I_N} u_i \leq \sum_{n=0}^{+\infty}(\sum_{i\in I_n} u_i) .$$

On a majoré par la même constante $\sum_{n=0}^{+\infty}(\sum_{i\in I_n} u_i)$ toutes les sommes de la forme $\sum_{i\in J} u_i$ avec J finie incluse dans I : la famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable et en passant au sup sur J, on obtient :

$$\sum_{i\in I} u_i \leq \sum_{n=0}^{+\infty}(\sum_{i\in I_n} u_i) .$$

6.4 Somme d'une famille sommable

On rappelle que si I désigne un ensemble dénombrable, il existe une suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties de I, croissante au sens de l'inclusion, et telle que la réunion des J_n soit égale à I. Une telle suite sera appelée une *suite induisant I*.

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille sommable de réels positifs, et $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite induisant I. La suite de réels $\sum_{i\in J_n} u_i$ est croissante (par positivité des u_i et par croissance de $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$), majorée par $\sum_{i\in I} u_i$, elle est donc convergente. Soit alors J une partie finie de I. Pour n assez grand, on a $J \subset J_n$ et par suite $\sum_{i\in J} u_i \leq \sum_{i\in J_n} u_i \leq \sum_{i\in I} u_i$. On fait alors tendre n vers l'infini dans cette inégalité, puis on passe au sup sur J pour obtenir finalement :

$$\sum_{i\in I} u_i = \lim_{n} \sum_{i\in J_n} u_i .$$

On a ainsi trouvé une autre formule donnant la somme d'une famille sommable positive, formule qui contrairement à la formule initiale est susceptible d'être généralisée aux familles non positives.

Soit maintenant une famille de complexes $(u_i)_{i\in I}$ supposée sommable, et $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite induisant *I*. Pour $p,q\in\mathbb{N}$ avec $p>q$, on a :

$$\left|\sum_{i\in J_p} u_i - \sum_{i\in J_q} u_i\right| = \left|\sum_{i\in J_p - J_q} u_i\right| \le \sum_{i\in J_p - J_q} |u_i| = \sum_{i\in J_p} |u_i| - \sum_{i\in J_q} |u_i| .$$

Mais d'après ce qui vient d'être vu pour les familles positives, la suite $(\sum_{i\in J_n} |u_i|)$ est convergente. L'inégalité précédente prouve alors que la suite $(\sum_{i\in J_n} u_i)$ est de Cauchy, donc convergente.

Soit alors une autre suite (K_n) induisant *I*. Posons $L_n = J_n \cup K_n$. Évidemment, la suite (L_n) induit *I* à son tour. De plus :

$$\left|\sum_{i\in L_n} u_i - \sum_{i\in J_n} u_i\right| = \left|\sum_{i\in L_n - J_n} u_i\right| \le \sum_{i\in L_n - J_n} |u_i| = \sum_{i\in L_n} |u_i| - \sum_{i\in J_n} |u_i| \underset{n}{\to} \sum_{i\in I} |u_i| - \sum_{i\in I} |u_i| = 0 .$$

Les suites $(\sum_{i\in L_n} u_i)$ et $(\sum_{i\in J_n} u_i)$, dont on sait qu'elles sont convergentes, convergent donc vers la limite. De la même façon, les suites $(\sum_{i\in L_n} u_i)$ et $(\sum_{i\in K_n} u_i)$ ont même limite, et il en va donc de même des suites $(\sum_{i\in J_n} u_i)$ et $(\sum_{i\in K_n} u_i)$.

On peut finalement énoncer :

<u>Théorème et définition</u> :

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de complexes supposée sommable. Alors, pour toute suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ induisant *I*, la suite $(\sum_{i\in J_n} u_i)$ est convergente, et sa limite ne dépend pas de la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ induisant *I* choisie. On peut alors définir *la somme* de la famille sommable $(u_i)_{i\in I}$ comme la limite commune aux suites de la forme $(\sum_{i\in J_n} u_i)$ où $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite quelconque induisant *I*.

<u>6.5 Sommation par paquets des familles sommables</u>

On utilisera librement les trois résultats suivants, dont la preuve (facile) est laissée en exercice :

i. Si $(u_i)_{i\in I}$ est une famille sommable de complexes, alors $\left|\sum_{i\in I} u_i\right| \le \sum_{i\in I} |u_i|$.

ii. Si $(u_i)_{i\in I}$ est une famille sommable de complexes et si $X\subset I$, alors $(u_i)_{i\in X}$ est encore sommable.

iii. Si *J* est une partie finie de *I* et si $(u_i)_{i\in I}$ est une famille sommable de complexes, alors $(u_i)_{i\in I-J}$ est aussi sommable, et $\sum_{i\in I} u_i - \sum_{i\in J} u_i = \sum_{i\in I-J} u_i$.

Soit, pour tout entier *p*, une suite $(J_{p,n})_{n\in\mathbb{N}}$ induisant l'ensemble dénombrable I_p.

On pose $K_N = J_{1,N}\cup\ldots\cup J_{N,N}$. Il est facile de voir que la suite $(K_N)_{N\in\mathbb{N}}$ induit *I*, et donc $\sum_{i\in I} u_i = \lim_N \sum_{i\in K_N} u_i$, de même que $\sum_{i\in I} |u_i| = \lim_N \sum_{i\in K_N} |u_i|$.

La famille $(|u_i|)_{i\in I}$ étant sommable, le théorème de sommation par paquets des familles positives affirme la convergence de la série $\sum(\sum_{i\in I_n}|u_i|)$, et il dit en outre que sa somme est $\sum_{i\in I}|u_i|$.

Puisque $\left|\sum_{i\in I_n} u_i\right| \le \sum_{i\in I_n}|u_i|$, on en déduit la convergence absolue de la série $\sum(\sum_{i\in I_n} u_i)$. De plus :

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{n=0}^{+\infty}(\sum_{i\in I_n} u_i) - \sum_{i\in K_N} u_i\right| &= \left|\sum_{n=0}^{+\infty}(\sum_{i\in I_n} u_i) - \sum_{n=0}^{N}(\sum_{i\in J_{n,N}} u_i)\right| \\
&= \left|\sum_{n=N+1}^{+\infty}(\sum_{i\in I_n} u_i) + \sum_{n=0}^{N}(\sum_{i\in I_n} u_i - \sum_{i\in J_{n,N}} u_i)\right| \\
&= \left|\sum_{n=N+1}^{+\infty}(\sum_{i\in I_n} u_i) + \sum_{n=0}^{N}(\sum_{i\in I_n - J_{n,N}} u_i)\right| \\
&\le \sum_{n=N+1}^{+\infty}(\sum_{i\in I_n}|u_i|) + \sum_{n=0}^{N}(\sum_{i\in I_n - J_{n,N}}|u_i|) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}(\sum_{i\in I_n}|u_i|) - \sum_{i\in K_N}|u_i| \\
&= \sum_{i\in I}|u_i| - \sum_{i\in K_N}|u_i| \xrightarrow[N\infty]{} 0\,.
\end{aligned}$$

Comme $\sum_{i\in I} u_i = \lim_N \sum_{i\in K_N} u_i$, on en déduit bien que :

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{n=0}^{+\infty}(\sum_{i\in I_n} u_i)\,.$$

<u>Remarque finale</u> : si l'on observe bien les résultats qui viennent d'être prouvés, il est clair qu'ils se généralisent immédiatement aux familles sommables d'éléments d'un espace vectoriel normé E, à condition que celui-ci soit ***complet*** *(on a utilisé de manière essentielle qu'une suite de Cauchy de complexes est convergente).*