GROUPES

---

1. **a.** Définit-on sur $\mathbb{R}$ une loi de groupe en posant $x \circ y = x + y - xy$? Comment régler le problème ? Calculer, pour tout réel x, $x^{(n)} = \underbrace{x \circ \ldots \circ x}_{n \text{ fois}}$.

b. Quel est le plus petit entier n tel qu'il existe un groupe non commutatif de cardinal n ?

c. Montrer que pour tout entier impair a et tout entier $n \geq 3$, on a $a^{2^{n-2}} \equiv 1 \ [2^n]$.

Pour quelles valeurs de n le groupe des unités de $\mathbb{Z} / 2^n \mathbb{Z}$ est-il cyclique ?

---

2. Soit G un groupe noté multiplicativement. Pour $a \in G$, on note τ_a l'application de G dans lui-même définie par $\tau_a(x) = axa^{-1}$.

a. Montrer que τ_a est un isomorphisme de G, et déterminer τ_a^{-1}.

b. Que vaut, pour a et b dans G, $\tau_a \circ \tau_b$?

c. On note $\mathrm{T} = \{\tau_a,\ a \in G\}$. Prouver que $(\mathrm{T}, \circ)$ est un groupe. Est-il isomorphe à G ?

---

3. On donne les trois groupes à 6 éléments suivants : $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ et $\mathcal{S}_3$. Dresser leurs tables de groupe. Prouver que les deux premiers sont isomorphes, et ne sont pas isomorphes au troisième.

---

4. Soient deux groupes finis G et H, et f un morphisme de G dans H.

a. Prouver que si a est un élément de G, alors l'ordre de $f(a)$ divise celui de a.

b. Trouver les morphismes de $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}, +)$ vers $(\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}, +)$.

---

5. Soit G un groupe fini non trivial ($G \neq \{e_G\}$) dans lequel on a $x^2 = e$ pour tout x, e étant le neutre de G.

a. Prouver que G est commutatif (calculer $(xy)^{-1}$ de deux manières) et d'ordre pair (l'ordre d'un groupe fini est son cardinal).

b. Soit x un élément de G différent de e et H un sous-groupe de G. Prouver que $H \cup xH$ est un sous-groupe de G.

c. On choisit pour H un sous-groupe strict de G d'ordre maximum, et pour x un élément de G qui n'est pas dans H. Prouver que $G = H \cup xH$.

d. Déduire de ce qui précède que l'ordre de G est une puissance de 2.

e. Confirmer le résultat de la question **d.** en donnant un exemple de tel groupe.

---

6. Soit H un groupe (noté multiplicativement), X un ensemble et f une bijection de X sur H. On pose :

$$\forall\, x, y \in X,\ x \circ y = f^{-1}\big(f(x) \times f(y)\big).$$

Prouver que $(X, \circ)$ est un groupe et que f est un isomorphisme de groupes de X sur H.

On dit que l'on a « transporté » ou « transféré » la structure de groupe de H dans X.

7*. **a.** Soit G un groupe fini de cardinal pair. Prouver que l'ensemble des x tels que $x^2 \neq e$ est de cardinal pair. En déduire qu'il existe dans G au moins un élément d'ordre 2.

b. Soit G un groupe fini de cardinal impair. Prouver que $\forall x \in G, \exists! y \in G \ / \ x = y^2$.

---

8. Soit G un groupe multiplicatif, et H une partie de G que l'on suppose *finie* et stable pour le produit.

a. Soit x un élément de H. Prouver qu'il existe deux entiers distincts p et q tels que $x^p = x^q$. En déduire que le neutre e de G est dans H, ainsi que l'inverse de x. Qu'en déduire ?

b. Une autre preuve : Soit x_0 un élément de H. Sachant que e est dans H, et en considérant l'application de H dans H : $x \mapsto x_0 x$, prouver que x_0^{-1} est dans H.

---

9. Soit l'élément s du groupe symétrique $\mathcal{S}_{16}$:

$$s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 5 & 8 & 12 & 16 & 9 & 10 & 6 & 15 & 4 & 7 & 14 & 3 & 1 & 2 & 11 & 13 \end{pmatrix}.$$

Décomposer s en cycles, en transpositions, donner sa signature, son ordre.

---

10. Trouver tous les sous-groupes finis de $(\mathbb{C}^*, \times)$.

Soient deux entiers $p, q \geq 2$. Déterminer l'intersection des groupes U_p et U_q des racines $p^{\text{ièmes}}$ et $q^{\text{ièmes}}$ de l'unité.

11*. Soient a et b deux éléments d'un groupe fini d'ordres respectifs α et β. On suppose que a et b commutent et que α et β sont premiers entre eux. Prouver que l'ordre de ab vaut $\alpha\beta$.

---

12. Soit G un groupe fini de cardinal n, et $\{e_1, \ldots, e_p\}$ un système de générateurs de G de cardinal minimum.

a. Prouver que les éléments de G que sont les $e_1^{\alpha_1} e_2^{\alpha_2} \ldots e_p^{\alpha_p}$ avec $\alpha_i = 0$ ou 1 sont deux à deux distincts.

b. En déduire que G possède un système de générateurs possédant moins de $\ln_2 n$ éléments.

---

13. Soit f un morphisme non constant d'un groupe *fini* G (noté multiplicativement) dans $(\mathbb{C}^*, \times)$.

a. Prouver l'existence d'un élément a de G tel que $f(a) \neq 1$. Que peut-on dire de l'application de G dans G définie par $x \mapsto ax$?

b. Calculer $\sum_{x \in G} f(x)$.

14.* Soit f un morphisme du groupe symétrique $\mathcal{S}_n$ dans le groupe multiplicatif $\mathbb{C}^*$, supposé non constant.

a. Quelles sont les valeurs possible de $f(\tau)$ quand τ est une transposition ?

b. En déduire que f prend ses valeurs dans $\{-1, 1\}$, et prouver l'existence d'une transposition τ_0 telle que $f(\tau_0) = -1$.

c. Calculer le produit de transpositions suivant : $(1\,i)(1\,j)(1\,i)$.

c. Prouver que $f(\tau) = -1$ pour *toute* transposition, et conclure.