INTÉGRALES IMPROPRES

1. Étudier la convergence des intégrales impropres suivantes :

a. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin\frac{1}{t^2}}{\ln(1+\sqrt{t})}\,\mathrm{d}t$ **b.** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\mathrm{e}^t-1}\,\mathrm{d}t$ **c.** $\displaystyle\int_{2/\pi}^{+\infty} \ln(\cos\frac{1}{t})\mathrm{d}t$ **d.** $\displaystyle\int_{2/\pi}^{+\infty} \ln(\sin\frac{1}{t})\mathrm{d}t$ **e.** $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\mathrm{d}t}{t^{\alpha}\left|\ln t\right|^{\beta}}$

f. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln t \sin\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ **g.** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(\pi t)}{\ln t}\,\mathrm{d}t$ **h.** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{\alpha}(1+t^{\beta})}$ **i.** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\left|t^{\alpha}-1\right|^{\beta}}$ **j.** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin t \sin(\frac{1}{t})\mathrm{d}t$

k. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t^2)\mathrm{d}t$ **l.** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan t}\,\mathrm{d}t$ **m.** $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{P(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t\,,\ P\in\mathbb{R}[X]$

---

2. Calculer, après avoir justifié leur existence, les intégrales suivantes :

a. $\displaystyle\int_{-1}^{2} \operatorname{arctg}\frac{t+1}{t-2}\mathrm{d}t$ **b.** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ **c.** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2\ln t}{(1+t^3)^2}\,\mathrm{d}t$ **d.** $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln(1-t^2)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ **e.** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2}$

---

3. Soit f une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs strictement positives. Prouver que les intégrales de f et de $1/f$ ne peuvent-elles être simultanément convergentes sur $\mathbb{R}^+$ (minorer le produit $\displaystyle\int_0^x f\times\int_0^x \frac{1}{f}$).

---

4. *Les deux questions sont indépendantes.*

a. La fonction $t\mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t^2-4}}$ est-elle intégrable sur $]2,+\infty[$?

b. Soit a un réel strictement positif. La fonction $t\mapsto \dfrac{\ln t}{\sqrt{1+t^{2a}}}$ est-elle intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$?

---

5. Un résultat plutôt surprenant

On pose, pour t élément de $]0,1]$, $g(t)=\dfrac{1}{t}\sin(\dfrac{1}{t})$.

a. Prouver, par changement de variable, que l'intégrale de g sur $]0,1]$ converge mais ne converge pas absolument.

b. On pose, pour x élément de $]0,1]$, $f(x)=\displaystyle\int_x^1 g(t)\mathrm{d}t$. Prouver que f possède une limite finie en 0. On peut donc prolonger f par continuité en 0, et ce prolongement sera encore noté f. Prouver que f est continue sur $[0,1]$ et de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ sur $]0,1]$.

c. Prouver que malgré l'extrême régularité de f, son graphe possède une longueur infinie.

---

6. On souhaite prouver la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\int_t^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t$ et la calculer. Pour ce faire, intégrer plusieurs fois par parties sur $[0,A]$ jusqu'à ce qu'il soit possible de calculer la limite du terme qui pose problème.

---

7. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose l'intégrale de f' convergente sur $\mathbb{R}_+^*$. Prouver que f a une limite finie en 0. On suppose en outre que l'intégrale de f est convergente sur $\mathbb{R}_+^*$. Prouver que f tend vers 0 en $+\infty$.

8. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Pour tout entier non nul n, on note $\mathcal{L}^n(I)$ l'ensemble des fonctions f continues par morceaux sur I, à valeurs complexes, telles que l'intégrale $\int_I |f(t)|^n \,\mathrm{d}t$ soit convergente.

a. On suppose $I = [a,b[$ avec b *fini*. Prouver l'inclusion $\mathcal{L}^n(I) \subset \mathcal{L}^1(I)$ (on pourra prouver au préalable l'inégalité $|f(t)| \leq 1 + |f(t)|^n$). Prouver plus généralement l'inclusion $\mathcal{L}^q(I) \subset \mathcal{L}^p(I)$ dès que l'entier q est plus grand que l'entier p.

b. On suppose que $I = [a,+\infty[$. Soit $n > 1$.

Prouver que $\mathcal{L}^n(I)$ n'est pas inclus dans $\mathcal{L}^1(I)$.

Prouver que si f est une fonction bornée qui est dans $\mathcal{L}^1(I)$, alors f est dans $\mathcal{L}^n(I)$.

Donner un exemple de fonction qui est dans $\mathcal{L}^1(I)$ mais pas dans $\mathcal{L}^n(I)$.

(9.) Lemme de Lebesgue

Soit f une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}^+$ dont l'intégrale converge *absolument* sur $\mathbb{R}^+$.

a. Prouver, pour tout réel x, l'existence de $I(x) = \int_0^{+\infty} f(t)\sin(xt)\mathrm{d}t$.

b. Soit $\varepsilon > 0$. Prouver l'existence d'une constante positive A telle que, pour tout x de $\mathbb{R}$, on ait :

$$\left| \int_A^{+\infty} f(t)\sin(xt)\mathrm{d}t \right| \leq \varepsilon .$$

c. En déduire que $I(x)$ tend vers zéro quand x tend vers $+\infty$ (le lemme de Lebesgue classique est supposé connu !).

10. **a.** Prouver, pour tout x de $[0,1]$ et tout n de $\mathbb{N}^*$, l'encadrement $(1-x)^n \leq \mathrm{e}^{-nx} \leq \dfrac{1}{(1+x)^n}$.

b. En déduire un encadrement de $\int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ à l'aide d'intégrales de Wallis.

c. Grâce à un équivalent des intégrales de Wallis, calculer l'intégrale de Gauss $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$.

11. **a.** Prouver l'existence de $\int_0^{+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt}}{t}\mathrm{d}t$ (a et b étant deux réels strictement positifs).

b. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} \int_{ax}^{bx} \dfrac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\mathrm{d}u$ (plusieurs méthodes...)

c. Calculer I en exprimant l'intégrale de x à $+\infty$ à l'aide d'intégrales de $\dfrac{\mathrm{e}^{-u}}{u}$

12. Soit g de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ telle que les intégrales $\int_0^{+\infty} g(t)^2 \,\mathrm{d}t$ *et* $\int_0^{+\infty} g''(t)^2 \,\mathrm{d}t$ convergent.

a. Prouver que l'intégrale $\int_0^{+\infty} gg''$ est convergente.

b. On fait l'hypothèse que l'intégrale $\int_0^{+\infty} g'^2$ est divergente. Prouver alors, grâce à une intégration par parties, que la fonction gg' tend vers $+\infty$ en $+\infty$. En déduire la limite de g^2 en $+\infty$, puis la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} g'^2$.

13. Soit F une fraction rationnelle réelle.

a. Soit r un éventuel pôle réel de F, et $h > 0$ assez petit pour que F ne possède pas d'autre pôle dans l'intervalle $]r, r+h]$. Prouver que l'intégrale $\int_r^{r+h} F(t)\mathrm{d}t$ est divergente.

b. On suppose F sans pôle réel. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur le degré de F pour que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} F(t)\mathrm{d}t$ soit convergente.

c. Soit α un complexe non réel, et n un entier supérieur ou égal à 2.

Justifier la convergence de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t-\alpha)^n}$ et la calculer.

d. On désigne toujours par α un complexe non réel, $\alpha = a + \mathrm{i}b$ avec a et b réels.

e. Calculer, pour $A > 0$, l'intégrale $\int_{-A}^{A} \frac{\mathrm{d}t}{t-\alpha}$.

f. Calculer $\lim_{A\to+\infty} \int_{-A}^{A} \frac{\mathrm{d}t}{t-\alpha}$ en fonction du signe de b.

On fixe désormais cette question une fraction rationnelle réelle F, supposée sans pôle réel et de degré inférieur ou égal à -2. Si α est un pôle de F, on note $\mathrm{Res}(F,\alpha)$ le coefficient de $\frac{1}{X-\alpha}$ dans la décomposition en éléments simples de F.

g. Prouver que $\sum_{\alpha \text{ pôle de } F} \mathrm{Res}(F,\alpha) = 0$ (penser à une ruse couramment employée quand on effectue une décomposition en éléments simples).

h. Prouver, grâce aux résultats des questions **2.** et **3.**, que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(t)\mathrm{d}t = \sum_{\substack{\alpha \text{ pôle de } F \\ \mathrm{Im}(\alpha)>0}} \mathrm{i}\pi \,\mathrm{Res}(F,\alpha) - \sum_{\substack{\alpha \text{ pôle de } F \\ \mathrm{Im}(\alpha)<0}} \mathrm{i}\pi \,\mathrm{Res}(F,\alpha) .$$

i. En déduire la « formule des résidus » :

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} F(t)\mathrm{d}t = 2\mathrm{i}\pi \sum_{\substack{\alpha \text{ pôle de } F \\ \mathrm{Im}(\alpha)>0}} \mathrm{Res}(F,\alpha)}$$

j. Calculer les intégrales $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)(t^2+t+1)}$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2}$.