Une construction simple et rapide (mais incomplète !) de $\mathbb{R}$

L'une des avancées majeures des mathématiques du XIX$^{\text{ème}}$ siècle a été la première présentation rigoureuse de l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, construction ouvrant la voie au développement de l'Analyse qui pouvait ainsi se fonder désormais sur des bases parfaitement saines.

Ce document propose une construction de $\mathbb{R}$ se rapprochant de celle de Dedekind. Cette présentation possède le gros avantage d'être simple, intuitive, rapide et très visuelle, la plupart des preuves consistant en la formalisation mathématique d'une évidence géométrique. Elle permet en outre d'obtenir extrêmement rapidement le théorème fondamental selon lequel toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure, résultat à partir duquel on peut prouver classiquement toutes les propriétés topologiques profondes de $\mathbb{R}$. Hélas cette simplicité a un prix et, comme nous le verrons, cette construction se prête mal à la définition de certains outils pourtant très basiques !

Ceux qui désireraient une construction de $\mathbb{R}$ plus complète (mais bien plus longue et délicate) en trouveront une ici : https://dl.dropbox.com/u/40341647/R.pdf.

L'idée de Dedekind est la suivante : les réels peuvent être vus intuitivement comme les "extrémités de droite" des demi-droites de $\mathbb{Q}$ commençant en $-\infty$. D'où la définition :

Définition 1 : on appelle *nombre réel* une partie X de $\mathbb{Q}$ possédant les propriétés suivantes :

i. $X \neq \varnothing$ et $X \neq \mathbb{Q}$;

ii. X est un ouvert (pour la topologie de l'ordre sur $\mathbb{Q}$) ;

iii. $\forall a \in X, \forall x \in \mathbb{Q}, x \leq a \Rightarrow x \in X$.

L'ensemble formé par les nombres réels sera noté $\mathbb{R}$.

Le choix de demander l'axiome d'ouverture *ii.* n'est pas anodin : en effet, les parties de $\mathbb{Q}$ que sont $]-\infty,1]$ et $]-\infty,1[$ vérifient les axiomes *i.* et *iii.* et possèdent la même extrémité droite, bien qu'elles soient distinctes. Demander l'ouverture permet d'exclure de fait $]-\infty,1]$ et permettra ultérieurement de gommer certaines difficultés (il va sans dire que quand nous évoquons l'intervalle $]-\infty,1[$, il s'agit de l'ensemble des rationnels strictement inférieurs à 1).

Propriété 1 : Pour tout rationnel r, l'ensemble $]-\infty,r[$ est un réel, et l'injection $r \mapsto]-\infty,r[$ permet d'identifier $\mathbb{Q}$ à une partie de $\mathbb{R}$.

Preuve : évident, puisqu'entre deux rationnels distincts il y en a toujours un troisième !

Théorème 1 : on définit sur $\mathbb{R}$ une relation d'ordre total en posant :

$$X \leq Y \Leftrightarrow X \subset Y .$$

Preuve : concernant le fait que l'on définit ainsi une relation d'ordre, il n'y a strictement rien à prouver puisque l'inclusion en est elle-même une ! Mais ce théorème affirme que l'ordre ainsi défini sur $\mathbb{R}$ est total. Soient en effet deux réels X et Y que nous supposerons distincts. Supposons par exemple qu'il existe un rationnel a qui est dans X mais pas dans Y. Il ne peut alors exister d'élément b de Y plus grand que a sans quoi, d'après l'axiome *iii.*,

a serait élément de Y. Tous les éléments de Y sont donc strictement plus petits que a et sont donc dans X. Ainsi, $Y \subset X$ ou encore $Y \leq X$.

Remarquons aussi que cet ordre sur $\mathbb{R}$ prolonge celui de $\mathbb{Q}$ puisque si r et r' sont deux rationnels tels que $r \leq r'$, alors $]-\infty, r[\subset]-\infty, r'[$.

Enfin, on a prouvé que si a est un rationnel qui est dans X sans être dans Y, on a $Y \subset]-\infty, a[\subset X$, ce qui donne le théorème suivant :

> Théorème 2 : $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ en ce sens que si X et Y sont deux réels tels que $Y < X$, alors il existe un rationnel a tel que $Y \subset]-\infty, a[\subset X$, ce qui peut s'écrire $Y \leq a \leq X$ d'après la propriété 1.

Reste à prouver l'une des propriétés-clefs de $\mathbb{R}$:

> Théorème fondamental : toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure.

Preuve : Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. Envisageons un majorant M de A, et posons $C = \bigcup_{X \in A} X$ (ne pas oublier que, tels qu'ils ont été définis, les réels sont des sous-ensembles de $\mathbb{Q}$!). Admettons momentanément que C est un réel. Alors C majore tous les éléments de A, et tout majorant de A devant contenir tous les éléments de A, il doit contenir leur réunion, c'est-à-dire C : C est bien "le plus petit majorant de A". Bien sûr, C est non vide. C'est un ouvert comme réunion d'ouverts. Si $a \in C$ et si t est un rationnel vérifiant $t \leq a$, il existe X dans A tel que $a \in X$ et donc $t \in X \subset C$: C vérifie l'axiome *iii.*. Reste à voir que $C \neq \mathbb{Q}$. Comme M est un réel, on a $M \neq \mathbb{Q}$, il existe donc un rationnel b tel que $b \notin M$: tous les éléments de M sont donc strictement plus petits que b, et *a fortiori* ceux de C. Ainsi $b \notin C$ et $C \neq \mathbb{Q}$: C est un réel.

Tout cela est bel et bon, mais il y a un petit détail qui a été oublié : c'est que le $\mathbb{R}$ que nous connaissons est un corps, or nous n'avons pas défini d'opérations sur $\mathbb{R}$! Et c'est là le principal défaut de cette présentation de $\mathbb{R}$. En effet, les réels sont définis comme étant des parties de $\mathbb{Q}$ satisfaisant certains axiomes s'énonçant avec des inégalités ; or, autant les inégalités se marient bien avec l'addition, autant elles se comportent mal vis-à-vis de la multiplication et ce pour de simples questions de signe !

Définissons dans un premier temps l'addition des réels.

> Définition 2 : soient X et Y deux réels. On définit leur somme de la façon suivante :
> $$X + Y = \{a + b,\ a \in X \text{ et } b \in Y\}.$$

On peut vérifier sans difficulté majeure que l'ensemble $X + Y$ ainsi défini vérifie à son tour les axiomes *i.*, *ii.* et *iii.* ce qui lui donne le statut de nombre réel. Cette addition est clairement associative et commutative, et possède le réel $]-\infty, 0[$ comme élément neutre. Reste à trouver un symétrique (ou opposé) à chaque élément de $\mathbb{R}$ pour donner à $(\mathbb{R}, +)$ une structure de groupe, première étape avant de faire de $\mathbb{R}$ un corps. Or, définir correctement l'opposé d'un élément X de $\mathbb{R}$ n'est pas si évident, et un brin de réflexion conduit à proposer… $-\overset{\circ}{\overbrace{\mathbb{Q} - X}}$ où $\mathbb{Q} - X$ désigne le complémentaire de X dans $\mathbb{Q}$, le $\circ$ son intérieur, et le signe $-$ apparaissant devant signifie "l'ensemble des opposés des éléments de l'ensemble…".

NB : le signe $-$ ayant déjà été employé de deux manières différentes (une pour le complémentaire, une pour opposer les éléments d'un ensemble), on désignera dans la suite par opp(X) l'opposé d'un réel X, et ce afin d'éviter toute ambiguïté).

Même si les vérifications que nous venons d'occulter sont besogneuses, elles ne présentent pas de difficultés mathématiques majeures. En revanche, comme on l'a dit, un écueil surgit au moment de définir le produit de deux réels. Copier naïvement le modèle de l'addition conduirait inévitablement à une impasse. En effet, imaginons que l'on pose :

$$X \times Y = \{ab,\ a \in X \text{ et } b \in Y\}.$$

Alors, avec cette définition, $]-\infty,-1[\times]-\infty,-2[=]2,+\infty[$ qui n'est pas un réel !

On peut cependant imaginer un artifice permettant de définir le produit de deux réels, mais l'idée même de devoir prouver que cette multiplication vérifie tous les axiomes permettant d'aboutir à ce que $\mathbb{R}$ possède une structure de corps donne froid dans le dos. Pourtant, pour un stakhanoviste prêt à envisager systématiquement tous les cas (et ça en fait beaucoup !), ce doit être faisable… Alors jouons un peu :

Si X est un réel, sa *valeur absolue* désigne le réel $|X| = X \cup \operatorname{opp}(X)$.

Par ailleurs, si X et Y désignent deux réels strictement positifs, on définit leur produit par :

$$X \times Y =]-\infty,0] \cup \{a.b,\ a \in X,\ b \in X,\ a,b \geq 0\}.$$

Enfin, on définit le produit de deux réels dans le cas général par une "règle des signes" :

$$X \times Y = |X| \times |Y| \text{ si } X \text{ et } Y \text{ sont de même signe, } X \times Y = \operatorname{opp}(|X| \times |Y|) \text{ sinon.}$$

<u>Remarque finale</u> : à partir de la donnée de $\mathbb{N}$, la construction des ensembles $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ est assez facile parce que purement algébrique (adjonction d'opposés aux entiers naturels, et d'inverses pour les entiers relatifs non nuls). Quant à $\mathbb{C}$, c'est sans aucun doute l'ensemble de nombres le plus simple à construire puisque ce n'est jamais que $\mathbb{R}^2$ muni de bonnes lois. En revanche, ce qui rend la compréhension de $\mathbb{R}$ nettement plus délicate, c'est que les nombres réels ne sont pas construits effectivement par des procédés algébriques mais sont des êtres analytiques vus comme des positions limites de rationnels (extrémités de "coupures" comme dans ce document, limites de suites de Cauchy de rationnels dans la construction de Cantor)…

Enfin, on peut construire facilement par ce moyen la droite numérique achevée $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty,+\infty\}$ en adjoignant à $\mathbb{R}$ les ensembles $\varnothing$ et $\mathbb{Q}$ qui jouent respectivement les rôles de $-\infty$ et de $+\infty$.